



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون دوپینگ ماز | پایه دوازدهم



دوپینگ ماز

ریاضیات

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

دوشنبه ۱۱ خردادماه ۱۴۰۵

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده علی منصف‌شکری علیرضا شریف‌خطیبی	ندا فرهختی - مائده بادان‌فیروز حمیدرضا ولی‌پور - یزدان نیک‌قدم مهران جعفری - فاطمه زارع علی اسدی

الگو و دنباله +
توان‌های گویا و
عبارت‌های جبری،
مقاطع مخروطی +
بردارها، آشنایی با
نظریه اعداد

جامع مشتق و کاربرد
مشتق، ماتریس‌ها،
گراف و مدل‌سازی

جامع حد و پیوستگی،
روابط طولی در مثلث
+ ترسیم‌های هندسه و
استدلال، آمار
توصیفی و استنباطی

جامع مثلثات،
چندضلعی‌های
محاطی و محیطی +
تبدیل‌های هندسه،
احتمال

جامع تابع + توابع
نمایی و لگاریتمی،
تجسیم فضایی + دایره،
آشنایی با مبانی
ریاضیات

مباحث پایه
(جبر، معادله و
نامعادله)، تالس و
چندضلعی‌ها،
ترکیب‌یات

مسیر حرفه‌ای جمع‌بندی تا کنکور ۱۴۰۵

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه‌های کنکور در نظر گرفته می‌شود.

راهنمای پامفله آزمونها

زمان پاسخگویی:

سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) |
زمان بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۳ تا ۶ - ۱۰۰۱

سطح سؤال:

آسان (اعتماد به نفس) | متوسط (محک جدی)
دشوار (چالش رشد).

هشتگ سؤال:

شماره درس + شماره پایه
دسته بندی راحت تر سؤالات

سبک سؤال:

خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) |
محاسباتی (فرمول ودقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:

منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

ویژگی های آزمونها دوپینگ

پهروسی سریع



«بابت نگاه صرفه ای، دلیل درست بودن یا نبودن گزینه ها را در لحظه ببینید و درون اقلای وقت، پرونده هر سؤال را با یادگیری کامل ببندید!»

پاسخنامه کامل



«یک نقشه راه دقیق و گام به گام که پیچیده ترین مسائل موضوع را بازمی کند تا هیچ ابهامی در مسیر موفقیت تان باقی نماند.»

نکات و دام های گنگوری



«در دام سؤالات نرفتید! ما ترغدهای طراحان سوال و مفاهیم کلیدی رو بهتون یاد می دیم تا با آمادگی کامل، همه سؤالات رو جواب بدید.»

کپسول دوپینگ



آماده یک انفجار یادگیری باشید!

«با کپسول دوپینگ "کلید موفقیت در دستان شماست! با مرور سریع و کار بردی نکات، از پس هر سوالی برآید و در آزمونها بدرخشید!»

دانش‌پوردوبینگ

مبحث	کتاب	فصل	وضعیت این آزمون	سطح دشواری این آزمون	آخرین وضعیت کنکور ۱۴۰۴
الگو و دنباله	ریاضی ۱	۱	۵ سؤال طراحی شده، تمام مباحث را پوشش داده و به رویکرد کتاب نزدیک هستند.	★★	۱ سؤال مفهومی و چالشی
	حسابان ۱	فصل ۱ درس ۱	۷ سؤال خلاقانه و شبیه‌ساز کنکور طراحی شده است.	★★★	-
توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	ریاضی ۱	۳	سؤالات طرح شده، مقداری از سطح کنکور بالاتر هستند و نیاز به دقت زیادی دارند.	★★★★	۱ سؤال ترکیبی

توصیه‌های دوبینگ

پیش‌بینی طراح...

۱ سؤال از مبحث «الگو و دنباله» و ۱ سؤال از مبحث «عبارت‌های جبری» با ایده‌های مشابه سؤالات سال‌های قبل می‌توانند جزء سؤالات کنکور پیش‌رو باشند.

آگر دنبال درس‌های آسان‌تر هستید...

در ابتدا کنکورهای سال‌های قبل در هر مبحث را مطالعه کنید و سپس سؤالات رشته تجربی را به عنوان تمرین حل کنید.

آگر زمان کمی دارید...

حتماً مبحث «دنباله حسابی و دنباله هندسی» را مطالعه کنید.

مفحن مسئول درس

سلام به همه دانش‌آموزان عزیز رشته ریاضی

مبحث دنباله حسابی و هندسی همواره در کنکور مطرح شده است. تعداد فرمول‌های کم و تست‌های شبیه به هم می‌تواند تسلط بر این مبحث را برایتان راحت‌تر کند و به یکی از نقاط قوت شما تبدیل شود. تبحر در کار کردن با عبارت‌های جبری به معنای دقت و سرعت در انجام عملیات است و می‌تواند به صورت ضمنی در حل تمام تست‌های حسابان به شما کمک کند. در مجموع هر دو مبحث این آزمون، در تست‌های ابتدایی حسابان دیده می‌شوند و تسلط علمی بر آن‌ها می‌تواند در تقویت روحیه و حس مثبت در کنکور، به شما کمک کند.

حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان

۱- هرگاه $1-2x$ و $2x$ ، $2x+1$ ، $2x+2$ به ترتیب جملات دوم، سوم، پنجم و ششم یک دنباله هندسی باشند، مقدار مثبت x کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (۱)$$

(آسان - محاسباتی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۲۶ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۴

اگر دنباله هندسی با جمله عمومی a_n باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_7 = 2x + 2 \\ a_3 = 2x + 1 \\ a_5 = 2x \\ a_6 = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a_3}{a_7} = \frac{a_6}{a_5} \Rightarrow \frac{2x+1}{2x+2} = \frac{1-2x}{2x}$$

طرفین وسطین $\rightarrow 4x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 8x^2 + 4x - 2 = 0$

$\div 2 \rightarrow 4x^2 + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=20} x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2(4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \xrightarrow{x>0} x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

دنباله هندسی

دنباله‌ای که هر جمله آن از ضرب کردن عدد ثابت غیر صفر r (یا q) در جمله ماقبل آن به دست می‌آید، دنباله هندسی نام دارد و آن عدد ثابت را قدرنسبت دنباله هندسی می‌نامند.

جمله اول	جمله دوم	جمله سوم	جمله چهارم	...	جمله n -ام
a_1	$a_1 r$	$a_1 r^2$	$a_1 r^3$	...	$a_n = a_1 r^{n-1}$
$\times r$		$\times r$	$\times r$		

کپسول دوپینگ | (دنباله هندسی)

$a_n = a_1 r^{n-1}$	جمله عمومی
$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$	ارتباط دو جمله متوالی
$\frac{a_n}{a_m} = r^{n-m}$	ارتباط هر دو جمله دلخواه
$b^2 = ac$	سه جمله متوالی a, b, c
$r^{n+1} = \frac{c}{a}$	درج n واسطه بین a و c $a \square \square \dots \square c$
$\frac{a}{r}, a, ar$	شکل سه جمله متوالی

۲- در دنباله هندسی با جملات $a_1, a_2, a_3, \dots$ شرط $\frac{a_3 a_1}{a_2^2} + \frac{a_2 a_1}{a_2^2} = \frac{3}{2}$ برقرار است. مقدار $\frac{a_3 + a_2}{a_1}$ چه عددی است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

(آسان - محاسباتی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۲۷ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۴

در دنباله هندسی با جملات $a_1, a_2, a_3, \dots$ می‌دانیم:

$$\frac{a_3 a_1}{a_2^2} = \frac{a_2^2}{a_2^2} = 1$$

بنابراین:

$$\frac{4(a_1 q) a_1}{(a_1 q^2)^2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4}{q^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

پس:

$$\Rightarrow \frac{a_3 + a_2}{a_1} = \frac{a_1 q^2 + a_1 q}{a_1} = q^2 + q = 4 + 2 = 6$$

جملات متساوی‌الفاصله در دنباله‌های حسابی و حسابی

اگر a, b, c سه جمله متوالی یا متساوی‌الفاصله از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه b واسطه هندسی a و c است، یعنی:

$$b^2 = ac$$

اگر a, b, c سه جمله متوالی یا متساوی‌الفاصله از دنباله‌ای حسابی باشند، آن‌گاه b واسطه حسابی a و c است، یعنی:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

کیسول دوپینگ | (قانون اندیس‌ها در دنباله‌های حسابی و هندسی)

اگر $m + n = p + q$ باشد، آن‌گاه:

(۱) در دنباله هندسی a_t داریم:

$$a_m \times a_n = a_p \times a_q$$

(۲) در دنباله حسابی a_t داریم:

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$

دقت کنید که فرمول واسطه حسابی و هندسی نیز نتیجه‌ای از همین قانون است. (حالت خاص که در آن دو تا از اندیس‌ها یکسان باشند).

• • •

۳- a_n جمله عمومی یک الگوی درجه ۲ است، به طوری که $a_{n+1} - a_n = 8n + 3$. اگر $a_1 = 2$ باشد، مقدار جمله بیستم چه عددی است؟

(۴) ۱۶۱۹

(۳) ۱۵۷۹

(۲) ۱۵۹۱

(۱) ۱۶۰۹

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۸ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۳

چون a_n الگوی درجه دوم است، پس $a_n = \alpha n^2 + \beta n + c$.

$$a_{n+1} - a_n = \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + c - \alpha n^2 - \beta n - c$$

در نتیجه:

$$= \cancel{\alpha n^2} + 2\alpha n + \alpha + \cancel{\beta n} + \beta - \cancel{\alpha n^2} - \cancel{\beta n} = 2\alpha n + \alpha + \beta \xrightarrow{a_{n+1} - a_n = 8n + 3} \begin{cases} 2\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4 \\ \alpha + \beta = 3 \Rightarrow \beta = -1 \end{cases}$$

$$a_n = 4n^2 - n + c, a_1 = 2 \Rightarrow 4 - 1 + c = 2 \Rightarrow c = -1$$

$$a_n = 4n^2 - n - 1 \Rightarrow a_{20} = 1600 - 20 - 1 = 1579$$

الگوهای درجه دوم

الگوی درجه دوم، یکی از الگوهای معروف غیرخطی است که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ ($a \neq 0$)، این الگو خطی نیست و جملات با عدد ثابتی اضافه نمی‌شوند اما اگر **الگوی اختلاف جملات متوالی** را به دست آوریم می‌بینیم که اختلاف‌ها با **عدد ثابتی بیشتر** می‌شوند. **ضریب n^2** همیشه **نصف** این عدد ثابت است.

یه نمونه با حال ببین!

$$a_n = 2n^2 + n - 1: 2, 9, 20, 35, 54, \dots$$

$$\text{الگوی اختلاف جملات: } 7, 11, 15, 19, \dots \Rightarrow d = 2(a) = 2 \times 2 = 4$$

کپسول دوپینگ | (الگوی درجه دوم)

در الگوهای درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ برای به دست آوردن جمله عمومی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(۱) خود دنباله خطی نیست ولی الگوی اختلاف‌ها، خطی است، یعنی در **دنباله اختلاف‌ها**، هر جمله با **عدد ثابت k جمع شده** و بعدی به دست می‌آید.

(۲) ضریب n^2 همواره **نصف k** است؛ یعنی $a = \frac{k}{2}$.

(۳) با قرار دادن $n = 1, 2$ و حل دستگاه، b و c را نیز می‌توانیم به دست آوریم.



۴- واسطه حسابی دو عدد مثبت از واسطه هندسی آن‌ها ۲ واحد بیشتر است. اگر مجموع جذر آن‌ها ۸ باشد، جمع واسطه

حسابی و هندسی آن‌ها چه عددی است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۳۶ (۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - ترکیبی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۲۳ - ۱۰۰۱

ترجمه صورت سؤال

«واسطه حسابی دو عدد مثبت از واسطه هندسی آن‌ها ۲ واحد بیشتر است.» یعنی وقتی واسطه هندسی با ۲ جمع می‌شود برابر با واسطه

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} + 2$$

حسابی می‌شود. پس:

اگر $a > b > 0$ ، آن‌گاه:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{2} &= \text{واسطه حسابی} \\ \sqrt{ab} &= \text{واسطه هندسی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 2$$

$$\Rightarrow a+b - 2\sqrt{ab} = 4 \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 4 \xrightarrow{a>b} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2$$

از طرفی، طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 8 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 10 \Rightarrow \begin{cases} a = 25 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} = \frac{25+9}{2} = 17 \\ \sqrt{ab} = \sqrt{25 \times 9} = 15 \end{cases} \Rightarrow \text{جمع} = 32$$

•• **از** ••

۵- در دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی t_n ، هرگاه دو شرط $t_5 + t_7 = 18$ و $t_9 - t_3 = 216$ برقرار باشند، مقدار $t_5 + t_7$ کدام است؟

(۱) ۴۹ (۲) ۵۸ (۳) ۶۳ (۴) ۶۵

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۲۲ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۲

چون t_n تشکیل یک دنباله حسابی یا همان دنباله خطی می‌دهد، پس با استفاده از فرض و قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_5 + t_7 = 2t_6 \Rightarrow 2t_6 = 18 \Rightarrow t_6 = 9 \quad (*)$$

$$t_9 - t_3 = (t_9 + t_3)(t_9 - t_3) = (2t_6)(6d) = 216 \xrightarrow{(*)} 18 \times 6d = 216 \Rightarrow d = \frac{6^3}{3 \times 6^2} = 2$$

از طرفی:

$$t_6 = t_1 + 5d \xrightarrow{(*)} 9 = t_1 + 10 \Rightarrow t_1 = -1$$

$$\begin{cases} t_5 = t_1 + 4d = -1 + 8 = 7 \\ t_3 = t_1 + 2d = -1 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow t_5 + t_3 = 49 + 9 = 58$$

دنباله حسابی 

دنباله‌ای که هر جمله آن از مجموع عدد ثابت d با جمله قبل از آن به دست می‌آید، دنباله حسابی نام دارد و d را **قدرنسبت** دنباله می‌گویند.

جمله اول	جمله دوم	جمله سوم	جمله چهارم	...	جمله n -ام
a_1	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$	$a_1 + 3d$	...	$a_n = a_1 + (n-1)d$
$+d$		$+d$		$+d$	

کپسول دوبینگ | (دنباله حسابی) 

$a_n = a_1 + (n-1)d$	جمله عمومی
$a_n - a_{n-1} = d$	ارتباط دو جمله متوالی
$a_n - a_m = (n-m)d$	ارتباط هر دو جمله دلخواه
$b = \frac{a+c}{2}$	سه جمله متوالی a, b, c
$d = \frac{c-a}{n+1}$	درج n واسطه بین a و c $a \square \square \dots \square c$
$x-d, x, x+d$	شکل سه جمله متوالی

•• **از** ••

۶- اگر مجموع ۱۲ جمله ابتدایی یک دنباله هندسی غیر ثابت با قدرنسبت q ، ۱۳ برابر مجموع ۴ جمله ابتدایی آن باشد، جمله دوازدهم دنباله چند برابر جمله چهارم آن است؟

۹ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

در دنباله هندسی با جمله عمومی t_n و قدرنسبت q داریم:

$$S_n = t_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow \begin{cases} S_{12} = t_1 \frac{1-q^{12}}{1-q} \\ S_4 = t_1 \frac{1-q^4}{1-q} \end{cases}$$

$$S_{12} = 13S_4 \Rightarrow t_1 \frac{1-q^{12}}{1-q} = 13 t_1 \frac{1-q^4}{1-q}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} (1-q^4)(q^8 + q^4 + 1) = 13(1-q^4)$$

$$\Rightarrow q^8 + q^4 - 12 = 0 \Rightarrow (q^4 - 3)(q^4 + 4) = 0 \xrightarrow{q^4 > 0} q^4 = 3$$

$$\frac{a_{12}}{a_4} = q^{12-4} = q^8 = (q^4)^2 = 9$$

بنابراین:

راهنمای زرتنگ بازی!

اگر خوب دقت کرده باشی متوجه شدی که وقتی به تساوی $1-q^{12} = 13(1-q^4)$ رسیدیم، تجزیه $1-q^{12}$ با اتحاد مزدوج به درد ساده کردن با $1-q^4$ نمی‌خوره و باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کردیم! ☺

کپسول دوبینک | (مجموع جملات دنباله‌های هندسی)

۱) مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q (با شرط اینکه q مخالف یک باشد)، برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

به مجموع n جمله اول دنباله هندسی می‌توان به صورت زیر هم نگاه کرد:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - \overbrace{a_1 q^n}^{a_{n+1}}}{1 - q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1 - q}$$

۲) در یک دنباله هندسی با قدرنسبت q داریم:

$$\frac{\text{مجموع } 2n \text{ جمله اول}}{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}} = \frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

$$\frac{\text{مجموع } n \text{ جمله دوم}}{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = q^n$$

۳) اگر تعداد جملات یک دنباله هندسی زوج باشد، مجموع جملات با اندیس زوج، q برابر مجموع جملات با اندیس فرد است.

۷- به هر جمله از جملات دنباله حسابی $a_n = 4n - 2$ ، مقدار ثابت k واحد اضافه می‌کنیم تا دنباله جدیدی به دست آید. اگر جمع ده جمله اول دنباله جدید ۱۰ برابر a_5 باشد، مقدار k کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳ - ۱۱۰۱

وقتی به هر جمله از یک دنباله حسابی، مقدار ثابت k را اضافه می‌کنیم مجدداً یک دنباله حسابی به دست می‌آید و جمله عمومی آن با اضافه کردن مقدار ثابت k به جمله عمومی دنباله اول به دست می‌آید.

$$b_n = a_n + k \Rightarrow d = b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n = 4$$

$$b_n = 4n - 2 + k \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2b_1 + 9d) = 10a_5$$

$$\Rightarrow b_1 + \frac{9}{2}d = a_1 + 4d \xrightarrow[b_1=2+k]{d=4} 2+k+\frac{9}{2}(4) = 2+4(4)$$

$$\Rightarrow 20+k = 18 \Rightarrow k = -2$$

کپسول دوپینگ | (مجموع جملات دنباله‌های حسابی)

اگر a_n دنباله‌ای حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d باشد، آن‌گاه مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

۱) مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت $S_n = An^2 + Bn$ نیز قابل نمایش است. در این حالت نکات زیر را خواهیم داشت:

۲) اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد آن‌گاه جمله n ام دنباله (جمله عمومی) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

• • •

۸- اعداد طبیعی را در دسته‌هایی چنان دسته‌بندی می‌کنیم که بزرگ‌ترین عضو هر دسته ۳ برابر کوچک‌ترین عضو همان دسته باشد، بزرگ‌ترین عضو دسته هشتم کدام است؟

$$\frac{3^9 - 3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3^9 + 3}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3^8 + 9}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3^8 - 9}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۵ - ۱۱۰۱

در دسته‌بندی اعداد طبیعی با دستور داده شده دسته‌های ابتدایی به صورت زیر است:

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, \dots, 12\}, \{13, \dots, 39\}, \dots$$

با کمی دقت اعداد بزرگ هر دسته دنباله‌ای به صورت زیر تشکیل می‌دهد:

$$3, 12, 39, 120, \dots$$

$$+9 \quad +27 \quad +81$$

پس:

$$3^n = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = 3 + 9 + 27 + 81 + \dots + 3^n$$

یعنی کافی است مجموع n جمله اول دنباله هندسی با $a_1 = 3$ و $q = 3$ را بیابیم. پس اگر عدد بزرگ دسته n ام را با b_n نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$b_n = 3 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} (3^n - 1)$$

$$\Rightarrow b_8 = \frac{3}{2} (3^8 - 1) = \frac{3^9 - 3}{2}$$



۹- در دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی a_n شرط $a_{12} = 3a_{36}$ برقرار است. جمع چند جمله از ابتدای دنباله صفر است؟

(۴) ۹۳

(۳) ۹۷

(۲) ۹۵

(۱) ۹۶

(متوسط - محاسباتی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

$$a_{12} = 3a_{36} \Rightarrow a_1 + 11d = 3(a_1 + 35d)$$

$$\Rightarrow a_1 + 11d = 3a_1 + 105d \Rightarrow 2a_1 + 94d = 0 \quad (*)$$

در دنباله حسابی با جمله عمومی a_n داریم: $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$ پس:

$$S_{95} = \frac{95}{2} (2a_1 + 94d) \xrightarrow{(*)} S_{95} = 0$$

کپسول دوپینگ | (قلق مجموع چند جمله اول برابر صفر؟)

در سبکی از سؤالات مربوط به مجموع جملات دنباله‌های حسابی، اطلاعاتی درباره دنباله می‌دهند و در عوض از ما می‌خواهند که مشخص کنیم **مجموع چند جمله اول دنباله برابر صفر خواهد بود؟** در این گونه سؤالات اطلاعات ما را به معادله‌ای به فرم $2a_1 + md = 0$ می‌رسانند که با توجه به فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌دانیم ضریب d در واقع همان $n-1$ است. پس در واقع مجموع $m+1$ جمله اول دنباله برابر با صفر می‌شود.



۱۰- جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب برابر ۵۴ و ۲ است. مجموع شش جمله اول این دنباله کدام است؟

(۴) ۸۴۸

(۳) ۵۴۶

(۲) ۳۶۴

(۱) ۷۲۸

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۵ و ۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا با استفاده از فرمول جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$\begin{cases} a_3 = 54 \\ a_6 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^2 = 54 \\ a_1 q^5 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\div} q^3 = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$a_1 q^2 = 54 \Rightarrow a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 54 \Rightarrow a_1 = 9 \times 54 \Rightarrow a_1 = 486$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{486(1-\frac{1}{729})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{486 \times 728}{\frac{2}{3} \times 729} = 728$$



۱۱- مجموع ۸ جمله اول یک دنباله هندسی، ۶۵ برابر مجموع چهار جمله اول آن است. جمله پنجم این دنباله، چند برابر جمله دوم آن است؟

- (۱) $\pm 4\sqrt{2}$ (۲) $\pm 8\sqrt{2}$ (۳) $\pm 16\sqrt{2}$ (۴) $\pm 12\sqrt{2}$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به فرمول مجموع جملات دنباله هندسی داریم:

$$\frac{S_8}{S_4} = 65 \Rightarrow \frac{a_1(q^8 - 1)}{a_1(q^4 - 1)} = 65 \Rightarrow \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = 65$$

$$\Rightarrow \frac{(q^4 - 1)(q^4 + 1)}{q^4 - 1} = 65 \Rightarrow q^4 + 1 = 65$$

$$\Rightarrow q^4 = 64 = 2^6 \Rightarrow q = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\frac{a_5}{a_2} = q^{5-2} = q^3 = \pm 16\sqrt{2}$$

• • i/o • •

۱۲- در یک دنباله حسابی، مجموع ۲۴ جمله اول، ۲۶ برابر مجموع ۱۲ جمله اول است. مجموع چه تعداد از جملات ابتدایی دنباله برابر صفر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به فرمول مجموع جملات دنباله حسابی $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$S_{24} = 26S_{12} \Rightarrow \frac{24}{2}(2a_1 + 23d) = 26 \times \frac{12}{2}(2a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow 24a_1 + 23d = 13(24a_1 + 11d) \Rightarrow 24a_1 + 120d = 0 \Rightarrow 24a_1 + 11d = 0 \Rightarrow \frac{11}{24}(24a_1 + 11d) = 0 \Rightarrow S_{11} = 0$$

• • i/o • •

۱۳- اگر $A = \frac{4\sqrt{3} + 6}{6 + 3\sqrt{3}}$ باشد، حاصل $A^2 - A\sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

(آسان - خطبه‌خط - سریع) ریاضی ۱ صفحه ۶۴ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

در صورت از $2\sqrt{3}$ و در مخارج از ۳ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$A = \frac{2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{3(2 + \sqrt{3})} \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow A^2 - A\sqrt{3} = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

مخرج را گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{4\sqrt{3} + 6}{6 + 3\sqrt{3}} \times \frac{6 - 3\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3} - 36 + 36 - 18\sqrt{3}}{36 - 27} = \frac{6\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \\ A\sqrt{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow A^2 - A\sqrt{3} = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

کپسول دوپینگ | (گویا کردن مخرج کسر)

چهار حالت زیر رو برای گویا کردن مخرج عبارت‌های کسری یاد بگیر:

(۱) اگر مخرج به شکل $\sqrt[n]{a^k}$ ($0 < k < n$) باشد، با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ ، توان a با فرجهٔ رادیکال برابر می‌شود.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} \quad \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$$

(۲) اگر مخرج به صورت $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ یا $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ باشد، برای گویا کردن، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{a - b}$$

(۳) اگر مخرج به صورت $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ یا $\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ باشد، صورت و مخرج را در قسمت چاق یا لاغر اتحاد چاق و لاغر ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{ab}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{ab}}{a \pm b}$$

(۴) اگر مخرج کسر، ترکیبی از موارد بالا باشد، نیاز است که از هر دو روش استفاده کرده یا از یک روش چند بار استفاده کنیم.

مثلاً برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{(1-\sqrt{2})(\sqrt[3]{2}-1)}$ یک بار در مزدوج $1-\sqrt{2}$ و یک بار در پیرانتز چاق $\sqrt[3]{2}-1$ ضرب می‌کنیم.



۱۴- ریشهٔ پنجم عدد مثبت a از حاصل ضرب ریشه‌های مرتبهٔ دهم آن 6 واحد بیشتر است. ریشهٔ پنجم $5 + \frac{a}{9}$ چه عددی

است؟

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۵۰ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

هر عدد یک ریشهٔ پنجم دارد که با عدد داده شده هم علامت است. اما هر عدد مثبت دو ریشهٔ مرتبه زوج دارد که قرینهٔ یکدیگر هستند، پس:

$$\sqrt[5]{a} = (\sqrt[5]{a})(-\sqrt[5]{a}) + 6 \Rightarrow \sqrt[5]{a} = -\sqrt[5]{a} + 6$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{a} = 3 \Rightarrow a = 3^5 \Rightarrow 5 + \frac{a}{9} = 5 + \frac{3^5}{9} = 5 + 27 = 32 \Rightarrow \sqrt[5]{32} = 2$$

ریشه n-ام

b را ریشه n-ام عدد a می‌گویند، اگر $b^n = a$ باشد.

اگر n فرد باشد، ریشه n-ام a برابر با $\sqrt[n]{a}$ است.

اگر n زوج باشد، ریشه‌های n-ام a با شرط آن که a نامنفی باشد، برابر با $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.

ویژگی‌های ریشه n-ام

۱) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

۲) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ و $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$

۳) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

توجه داشته باشید که ...

اگر n زوج باشد، باید a و b مثبت باشند.

۴)
$$\begin{cases} 0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > a \\ a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < a \\ -1 < a < 0 \xrightarrow{\text{فرد } n} \sqrt[n]{a} < a \\ a < -1 \xrightarrow{\text{فرد } n} \sqrt[n]{a} > a \end{cases}$$

کپسول دوپینگ | (همه چیز درباره ریشه n-ام)

n فرد (ریشه فرد)	n زوج (ریشه زوج)	n \ a
هر عددی دقیقاً یک ریشه فرد دارد؛ $\sqrt[n]{a}$.	هر عدد مثبت دوتا ریشه زوج دارد: $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$	اعداد مثبت
	-	اعداد منفی
چه n زوج باشد و چه فرد، ریشه n-ام صفر، همان صفر است؛ $\sqrt[n]{0} = 0$.		صفر

نکته: وقتی n زوج است: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

دقت کنید که اگر n فرد باشد، نیازی به قدرمطلق نیست.

نکته: به فرق $\sqrt[n]{a^n}$ و $(\sqrt[n]{a})^n$ دقت کنید. اگر n فرد باشد خیالتان راحت است، اما برای n‌های زوج، $\sqrt[n]{a}$ در اعداد منفی تعریف نمی‌شود، پس وقتی n زوج است، برای $\sqrt[n]{a}$ لازم است $a > 0$ باشد. پس یادتان باشد که:

حاصل $(\sqrt[n]{a})^n$ وقتی n زوج و $a > 0$ باشد، می‌شود: a.

حاصل $\sqrt[n]{a^n}$ برای n‌های زوج می‌شود: |a|.

۱) در جمع و تفریق حق نداریم $\sqrt[n]{}$ را جدا کنیم. یعنی $\sqrt[n]{a+b}$ الزاماً با $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ مساوی نیست. $\sqrt[n]{a-b}$ هم الزاماً با $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ برابر نیست.

۲) در ضرب و تقسیم می‌توانیم $\sqrt[n]{}$ را جدا کنیم. اما باید حواسمان به n‌های زوج باشد.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

(۳) اجازه داریم توان را زیر رادیکال ببریم، یعنی: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(۴) اجازه داریم اگر a مثبت باشد، توان و مرتبه ریشه (یعنی فرجه رادیکال) را با هم ساده کنیم. یعنی: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

توجه کنید که اگر a مثبت نباشد و با ساده کردن مشکل تعریف‌شدگی پیش بیاید یعنی مجاز نیستیم ساده کنیم.

(۵) اگر بخواهیم $a\sqrt{b}$ را به صورت یک رادیکال بنویسیم، ۲ حالت داریم:

$$۱) a > 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

$$۲) a < 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = -(-a)\sqrt{b} = -|a|\sqrt{b} = -\sqrt{a^2} \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$$



۱۵- با فرض $x^2 - 7x + 1 = 0$ ، مقدار $x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ چه عددی است؟

۱۸ (۴)

۲۱ (۳)

۱۶ (۲)

۱۴ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - ریاضی ۱ صفحه ۶۴ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

$$x^2 - 7x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 7x \xrightarrow{\div x} x + \frac{1}{x} = 7 \quad (*)$$

$$x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$$

از طرفی:

$$\text{مطابق اتحاد } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ داریم:}$$

$$x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \stackrel{(*)}{=} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \times 6 \quad (۱)$$

پس کافی است $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ را به دست آوریم، برای این منظور با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$x + \frac{1}{x} = 7 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 = 7 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = 3 \times 6 = ۱۸$$

روش دوم

$$A = x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{x^3 + 1}{x\sqrt{x}} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x\sqrt{x}}$$

$$\stackrel{x^2 + 1 = 7x}{=} \frac{(x+1)(7x - x)}{x\sqrt{x}} = \frac{6x(x+1)}{x\sqrt{x}} = 6\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$A = 6\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = 36\left(x + \frac{1}{x} + 2\right) = 36\left(\frac{x^2 + 1 + 2x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{36 \times 9X}{X} \Rightarrow A = 6 \times 3 = 18$$



۱) مربع دوجمله‌ای

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \end{cases}$$

۲) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

۳) جمله مشترک: $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + (bc)$

۴) چاق و لاغر:

$$\begin{cases} (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3 \end{cases}$$

۵) مکعب دوجمله‌ای:

$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

کیسول دوبینگ | (نوع خاصی از اتحاد مربع دوجمله‌ای)

اگر جمله اول در اتحاد مربع دوجمله‌ای برابر با X و جمله دوم $\frac{1}{X}$ باشد خواهیم داشت:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

این نکته همواره مورد توجه طراحان سؤال بوده و بهتر است چشمتان را به دیدنش آشنا و سریع آن را شناسایی کنید!

• • •

۱۶- هرگاه $x = \sqrt{5-2\sqrt{6}}$ باشد، به طوری که $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$ حاصل $A^2 + 2\sqrt{6}$ چه عددی است؟

(۱) $5-2\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۵ (۴) $5-4\sqrt{6}$

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۶۳ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \frac{(\sqrt{x})^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{x - \sqrt{x} + 1}$$

مطابق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$A = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} = x + \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} - 1 = x$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{5-2\sqrt{6}} \Rightarrow A^2 + 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 5$$

کیسول دوبینگ | (ترفندهای ساده‌سازی)

$$x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$$

• • •

۱۷- اگر چندجمله‌ای $x^n + 2x^2$ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چندجمله‌ای‌های $p(x) = x^6 + ax^3$ و $f(x) = x^5 + x^3 + 10x^2$ باشد، مقدار an کدام است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۱۵

(۲) ۲۴

(۱) ۱۲

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - ریاضی ۱ صفحه ۶۴ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

برای یافتن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو چندجمله‌ای، ابتدا آن‌ها را تجزیه می‌کنیم و داریم:

$$p(x) = x^3(x^3 + a)$$

$$f(x) = x^2(x^3 + x + 10) = x^2(x + 2)(x^2 - 2x + 5)$$

$$x^n + 2x^2 = x^2(x^{n-2} + 2)$$

با توجه به آن که $x^n + 2x^2$ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است، پس:

$$x^n + 2x^2 = x^2(x + 2)$$

باید $n - 2 = 1$ یعنی $n = 3$ باشد، در این صورت:

یعنی هر دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $f(x)$ باید عوامل $x + 2$ و x^2 را داشته باشند، پس:

$$p(x) = x^3(x^3 + a) = x^3(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \quad a=8$$

$$f(x) = x^2(x + 2)(x^2 - 2x + 5)$$

$$na = 24$$

به این ترتیب، $n = 3$ و $a = 8$ است، پس

کپسول دوپینگ | (کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو چندجمله‌ای)

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند:

۱) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک p و q یک چندجمله‌ای با بزرگ‌ترین درجه است که هم p و هم q بر آن بخش‌پذیر باشند.

$$\begin{cases} p(x) = f(x) \times r(x) \\ q(x) = f(x) \times t(x) \end{cases} \xrightarrow{\text{r و t فاقد عامل مشترک}} f(x) \text{ (م.م.ب) } p \text{ و } q \text{ است.}$$

برای به‌دست آوردن م.م.ب دو چندجمله‌ای p و q دو چندجمله‌ای را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم و سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با کوچک‌ترین توان را به‌عنوان م.م.ب در نظر می‌گیریم.

۲) کوچک‌ترین مضرب مشترک p و q (که بیشتر برای تعیین مخرج مشترک استفاده می‌شود) یک چندجمله‌ای است که هم بر p و هم بر q بخش‌پذیر باشد و دارای کم‌ترین درجه ممکن باشد.

برای محاسبه ک.م.م دو چندجمله‌ای p و q پس از تجزیه آن‌ها، کافی است عوامل مشترک را با بیشترین توان در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم.

۱۸- با فرض $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{1+a} = 2$ ، ساده شده عبارت $A = \frac{1}{a-a\sqrt{a}} + \frac{1}{a\sqrt{a}+a}$ کدام عدد است؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{1}{2}$

(آسان - محاسباتی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۶۲ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا فرض داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} = 2 \Rightarrow \frac{a+1+a-1}{a^2-1} = 2 \Rightarrow a^2-1=a$$

یعنی:

$$a^2 - a - 1 = 0 \quad (*)$$

حال عبارت A را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{a - a\sqrt{a}} + \frac{1}{a + a\sqrt{a}} = \frac{2a}{a^2 - a^3} = \frac{2}{a - a^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{2}{-1} = -2$$

•• ibo ••

۱۹- با فرض $A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + 1)}$ مقدار $(A^2 + 3)(A + 3)$ کدام است؟

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵) - ریاضی ۱ صفحه ۶۷ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۳

اگر مخرج کسر A را گویا کنیم، داریم:

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} \Rightarrow A = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$\Rightarrow A + 1 = \sqrt[3]{2} \quad (*)$$

اما با ساده کردن حکم داریم:

$$(A + 3)(A^2 + 3) = A^3 + 3A^2 + 3A + 9 = (A + 1)^3 + 8 \stackrel{(*)}{\rightarrow} \text{حاصل} = 2 + 8 = 10$$

•• ibo ••

۲۰- اگر $A = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3} - 1}}{\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$ مقدار $(A - 2)^2$ چه عددی است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵) - ریاضی ۱ صفحه ۶۱ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم و سپس مخرج آن را گویا می‌کنیم.

$$A^2 = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \Rightarrow A^2 = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{3 - 2} \Rightarrow A^2 = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \Rightarrow A = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{6} + 2 \Rightarrow (A - 2)^2 = 6$$

•• ibo ••

داشبورد دوبینگ

کتاب	فصل	وضعیت این آزمون	سطح دشواری این آزمون	آخرین وضعیت کنکور ۱۴۰۴
هندسه ۳	۲	۳ سؤال مشابه کنکور، ۲ سؤال با ایده نو و ۱ سؤال با الهام از کتاب درسی طرح شده است.	★★★★★	یک سؤال با الهام از کنکورهای گذشته
	۳	۱ سؤال مشابه کنکور، ۱ سؤال با ایده نو و ۲ سؤال با الهام از کتاب درسی طرح شده است.	★★★★★	یک سؤال با ایده نو
گسسته	۱	۷ سؤال مشابه کنکور، ۱ سؤال با ایده نو و ۲ سؤال با الهام از کتاب درسی طرح شده است.	★★★★★	یک سؤال با الهام از مفاهیم کتاب درسی

توصیه‌های دوبینگ

پیش‌بینی طراح...

در درس هندسه ۳ یک سؤال از مبحث «دایره» یا «سهمی» و در درس ریاضیات گسسته یک سؤال از مبحث «ویژگی‌ها و معادلات همنهشتی» می‌توانند جزء کاندیدهای اصلی سؤالات کنکور ۱۴۰۵ باشند.

آزمون‌های آسان تر هستید...

پس از حل مسائل کتاب درسی، به حل سؤالات کنکور ۱۰ سال اخیر بپردازید.

آزمون کمی دارید...

در درس هندسه ۳ تمرکزتان را روی مباحث «دایره» و «سهمی» از فصل دوم و مباحث «ضرب داخلی و خارجی بردارها» از فصل سوم و در درس گسسته نیز تمرکزتان را روی مبحث «ویژگی‌ها و معادلات همنهشتی» بگذارید.

سفن مسئول درس

سلام به همه دانش‌آموزان عزیز رشته ریاضی

در برنامه‌ریزی برای آمادگی کنکور، آشنایی دقیق با مباحث مهم هر درس و بررسی سؤالات کنکورهای سال‌های اخیر می‌تواند کمک زیادی به افزایش تسلط شما کند. مباحث مطرح‌شده در این آزمون معمولاً در مجموع حدود ۲ تا ۳ سؤال از کنکور سراسری را به خود اختصاص می‌دهند؛ بنابراین توجه هدفمند به آن‌ها می‌تواند تأثیر قابل‌توجهی در نتیجه شما داشته باشد. در درس هندسه ۳، پیشنهاد می‌شود تمرکز ویژه‌ای بر مباحث «دایره» و «سهمی» داشته باشید. این دو مبحث از قسمت‌های مهم و کاربردی هندسه هستند و در سال‌های اخیر نیز بارها مورد توجه طراحان کنکور قرار گرفته‌اند. تسلط بر روابط و ویژگی‌های این بخش‌ها می‌تواند در حل بسیاری از سؤالات این درس نقش تعیین‌کننده‌ای داشته باشد. در درس ریاضیات گسسته نیز به نظر می‌رسد توجه طراحان در سال‌های اخیر بیش از گذشته به سمت مبحث «قضیه تقسیم» جلب شده است. البته در کنار آن، از مبحث «همنهشتی» و به‌ویژه حل معادله‌های همنهشتی نیز غافل نشوید، چرا که این قسمت‌ها نیز از مباحث مهم و سؤال‌خیز به شمار می‌آیند. برای دستیابی به تسلط بیشتر در این دو درس، توصیه می‌شود علاوه بر بررسی دقیق کنکورهای سال‌های اخیر، تحلیل سؤالات این آزمون را نیز در برنامه مطالعاتی خود قرار دهید تا با الگوهای طرح سؤال و نکات پرتکرار این مباحث بیشتر آشنا شوید.

سیدجواد نظری

۲۱- دایره‌ای از نقاط $(۴, ۷)$ و $(۶, ۳)$ می‌گذرد. اگر معادله یکی از قطرهای آن $y - x = ۱$ باشد، اندازه قطر این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{۱۰}$ (۲) $\sqrt{۲۰}$ (۳) $\sqrt{۴۰}$ (۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵) - هندسه ۳ صفحه ۴۲ - ۱۲۰۲

می‌دانیم مرکز دایره روی خط $y - x = ۱$ یا $y = x + ۱$ واقع است پس فرض می‌کنیم مختصات آن به صورت $O(\alpha, \alpha + ۱)$ است. حال باید فاصله مرکز از نقاط $A(۴, ۷)$ و $B(۶, ۳)$ با هم برابر باشد:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۴)^2 + (\alpha - ۶)^2} = \sqrt{(\alpha - ۶)^2 + (\alpha - ۳)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - ۴)^2 + (\alpha - ۶)^2 = (\alpha - ۶)^2 + (\alpha - ۳)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha^2} - ۸\alpha + ۱۶ = \cancel{\alpha^2} - ۴\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۱۲ \Rightarrow \alpha = ۳$$

با جایگذاری $\alpha = ۳$ در OA شعاع به دست می‌آید:

$$R = OA = \sqrt{(۳ - ۴)^2 + (۳ - ۶)^2} = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$$

بنابراین قطر دایره برابر است با:

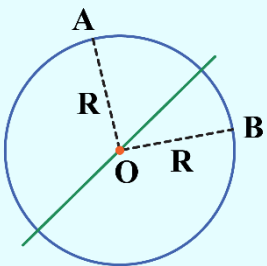
$$۲R = ۲\sqrt{۱۰} = \sqrt{۲^2 \times ۱۰} = \sqrt{۴۰}$$

نوشتن معادله دایره وقتی گفته می‌شود مرکز آن روی فلان خط است.

در بعضی از مسائل به جای این که مرکز را به طور مستقیم بدهند، مکان هندسی مرکز را به ما می‌دهند، یعنی می‌گویند مرکز روی فلان خط است در این نوع مسائل، مرکز را به صورت پارامتری روی آن خط در نظر می‌گیریم و با استفاده از شرایط داده شده در مسئله، پارامتر را به دست می‌آوریم. در این جا منظور از شرایط این است که طراح معمولاً شعاع را به دو روش مختلف به طور غیرمستقیم در اختیار ما می‌گذارد که باید آن‌ها را حساب کرده و با هم برابر قرار دهیم. این مسائل معمولاً به سه شکل مختلف بیان می‌شوند که در قالب سه حالت کلی آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

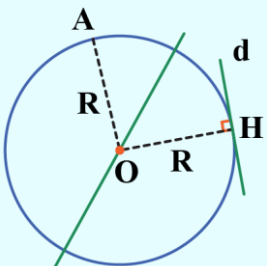
۱) فرض کنید قرار است مرکز روی خط $y = ax + b$ باشد و دایره از نقاط A و B بگذرد:

• در این حالت مرکز را $O(\alpha, a\alpha + b)$ فرض می‌کنیم و OA را با OB برابر قرار می‌دهیم تا α به دست آید.



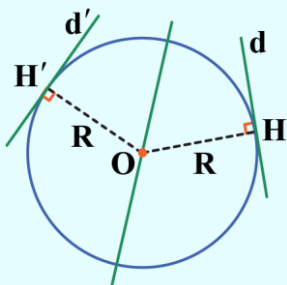
۲) فرض کنید قرار است مرکز روی خط $y = ax + b$ باشد و دایره از نقطه A بگذرد و بر خط d مماس باشد:

• در این حالت مرکز را $O(\alpha, a\alpha + b)$ فرض می‌کنیم و OA را با OH برابر قرار می‌دهیم تا α به دست آید.



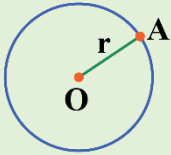
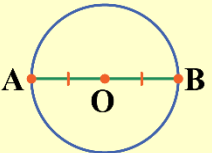
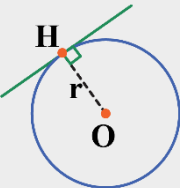
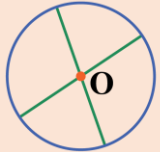
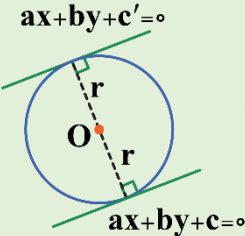
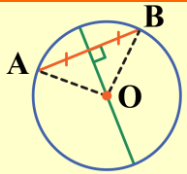
۳) فرض کنید قرار است مرکز روی خط $y = ax + b$ باشد و دایره بر دو خط d و d' مماس باشد:

• در این حالت مرکز را $O(\alpha, a\alpha + b)$ فرض می‌کنیم و OH را با OH' برابر قرار می‌دهیم تا α به دست آید.



گاهی به جای این که گفته شود مرکز دایره روی فلان خط است گفته می‌شود فلان خط قطری از دایره است.

کیسول دوبینگ | (مرکز و شعاع دایره در حالت‌های مختلف)

شعاع دایره برابر فاصله مرکز و آن نقطه است.	 $r = OA$	مرکز دایره و نقطه‌ای از آن را داریم.
مرکز در وسط آن‌ها است و شعاع نصف فاصله آن‌ها است.	 $r = OA = \frac{AB}{2}$ $O = \frac{A+B}{2}$	دو سر یک قطر دایره را داریم.
شعاع برابر فاصله مرکز دایره از خط مماس است.	 $r = OH$	مرکز و یک خط مماس بر دایره را داریم.
مرکز در محل برخورد آن‌ها است و برای به دست آوردن آن باید دستگاه شامل معادله خط‌ها را حل کنیم.		معادله دو قطر از دایره را داریم.
مرکز روی خط وسط آن‌ها $(ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0)$ و شعاع نصف فاصله آن‌ها است.	 $ax+by+c=0$ $ax+by+c'=0$ $2r = \frac{ c-c' }{\sqrt{a^2+b^2}}$	دو خط مماس موازی بر دایره را داریم.
مرکز روی خط عمودمنصف آن‌ها است.		دو نقطه روی محیط دایره داریم.

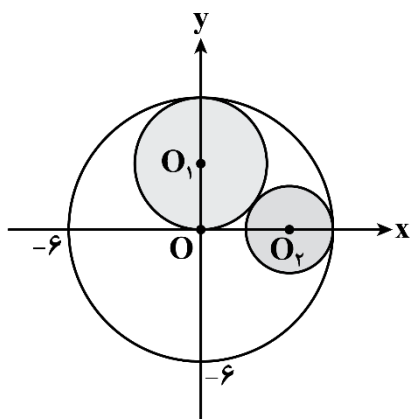
۲۲- در شکل مقابل معادله مماس مشترک داخلی دو دایره رنگ شده کدام است؟

(۱) $3x - 4y = 12$

(۲) $4x - 3y = 12$

(۳) $4x - 3y = 6$

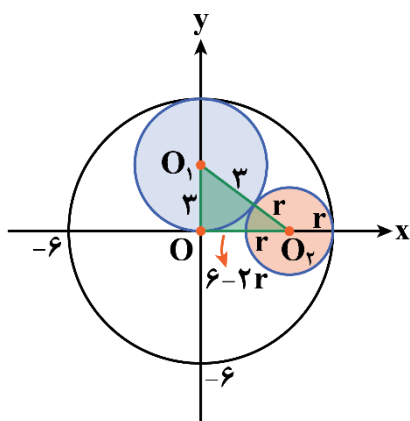
(۴) $3x - 4y = 6$



(سخت - مفهومی - زمان بر) - هندسه ۳ صفحه ۴۲ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۳

شعاع کوچک‌ترین دایره را r فرض می‌کنیم همچنین معلوم است که شعاع بزرگ‌ترین دایره ۶ و شعاع دایره متوسط نیز ۳ خواهد بود، بنابراین از O_1 به O_2 وصل می‌کنیم و در مثلث OO_1O_2 طبق فیثاغورس داریم:



$$(6 - 2r + r)^2 + 3^2 = (3 + r)^2 \Rightarrow (6 - r)^2 + 9 = (3 + r)^2$$

$$\Rightarrow 36 - 12r + r^2 + 9 = 9 + 6r + r^2 \Rightarrow 18r = 36 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین معادله دو دایره رنگی به صورت زیر است:

$$C_1: \begin{cases} O_1(0, 3) \\ R_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$$C_2: \begin{cases} O_2(4, 0) \\ R_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 4$$

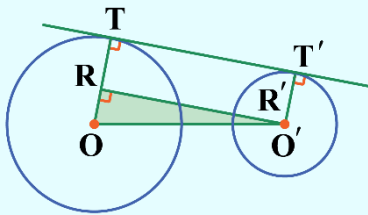
حال معادله مماس مشترک داخلی (وتر مشترک در حالت خاص) عبارت است از:

$$(x^2 + (y - 3)^2 - 9) - ((x - 4)^2 + y^2 - 4) = 0 \Rightarrow -6y + 8x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 3y - 4x + 6 = 0 \Rightarrow 4x - 3y = 6$$

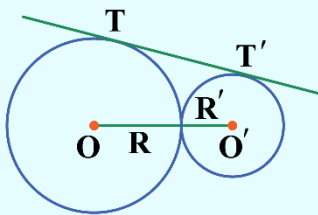
مماس مشترک خارجی

در شکل روبه‌رو به TT' مماس مشترک خارجی دو دایره می‌گوییم که اگر فاصله بین مرکزهای دو دایره $OO' = d$ و طول شعاع‌های دو دایره R و R' باشد، به شرط آن که $d > |R - R'|$ ، طول TT' از دستور زیر به دست می‌آید:



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

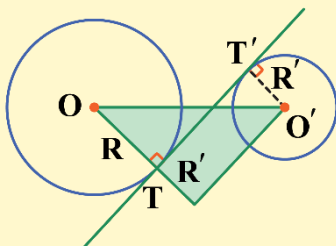
در حالتی که دو دایره مماس خارج باشند که $d = R + R'$ است، فرمول TT' تبدیل به رابطه زیر می‌شود:



$$TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} = 2\sqrt{RR'}$$

مماس مشترک داخلی

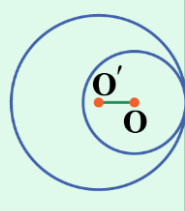
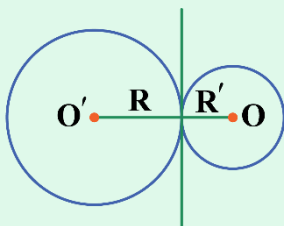
در حالتی که دو دایره متقاطع باشند ($d > R + R'$)، مماس مشترک داخلی TT' مطابق شکل روبه‌رو تعریف می‌شود که طول آن از دستور زیر به دست می‌آید:



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

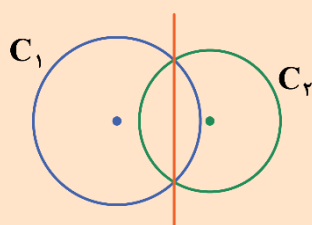
نکته!

اگر دو دایره مماس خارج باشند ($d = R + R'$)، طول مماس مشترک داخلی صفر است و در بقیه حالت‌های دو دایره (مقاطع، مماس داخل، متداخل و هم‌مرکز) هم مماس مشترک داخلی نداریم. اگر دو دایره مماس داخل باشند، تنها یک مماس مشترک خارجی با طول صفر داریم.



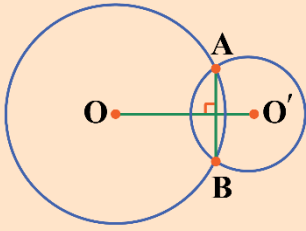
کیسول دوبینک | (معادله وتر مشترک)

اگر دو دایره $C_1: (x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - r_1^2 = 0$ و $C_2: (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 - r_2^2 = 0$ متقاطع باشند، معادله وتر مشترک آن‌ها از تفاضل معادله دو دایره به دست می‌آید. یعنی:



$$C_1 - C_2 = 0$$

در حالت خاصی که دو دایره بر هم مماس باشند، وتر مشترک تبدیل به **مماس مشترک** خواهد شد. حال اگر دو دایره **مماس داخل** باشند وتر مشترک تبدیل به **مماس مشترک خارجی** و اگر دو دایره **مماس خارج** باشند، وتر مشترک تبدیل به **مماس مشترک داخلی** خواهد شد. خوب است بدانیم که **خط‌المركزين** OO' ، **عمودمنصف وترمشترک** است.



یه نمونه باحال ببین!

وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ با کدام خط موازی است؟

- (۱) محور x ها
(۲) نیمساز ربع اول و سوم
(۳) محور y ها
(۴) نیمساز ربع دوم و چهارم

پاسخ تشریحی:

برای پیدا کردن معادله وتر مشترک، معادله دو دایره را از هم کم می‌کنیم:

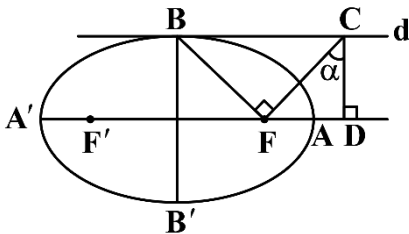
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 - (x^2 + y^2 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow \text{موازی نیمساز ربع اول و سوم}$$

پاسخ: گزینه ۲

•••

۲۲- در بیضی شکل مقابل، AA' و BB' دو قطر بیضی‌اند و خط d به موازات قطر AA' در نقطه B بر بیضی مماس است. اگر کمترین و بیشترین فاصله یک کانون از رأس کانونی به ترتیب برابر ۴ و ۱۲ باشد، $\tan \alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) ۱
(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

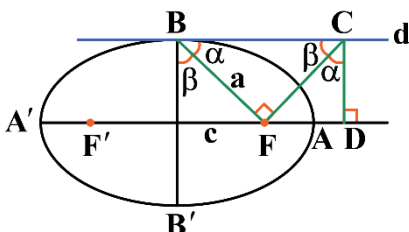
(متوسط - خط به خط - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۴۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

طبق فرض مسئله $a - c = 4$ و $a + c = 12$ است حال با حل دستگاه داریم:

$$a = 8, c = 4$$

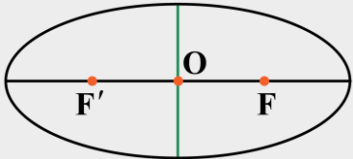
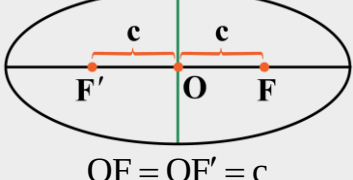
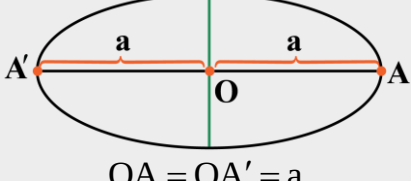
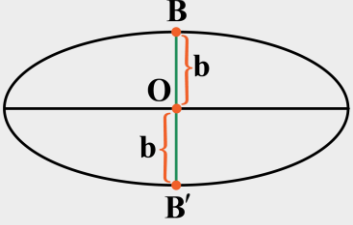
حال مطابق شکل مقابل در مثلث قائم‌الزاویه BFC داریم:



$$\sin \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{2} \xrightarrow[\beta = 90^\circ - \alpha]{\alpha + \beta = 90^\circ} \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$$

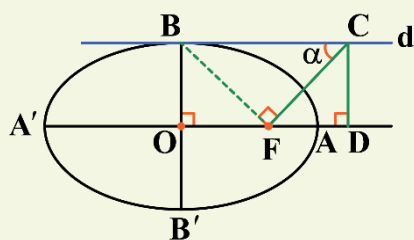
$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

نقاط مهم بیضی

شکل	محل	نماد	نام نقطه
	وسط نقاط ثابت F و F'	O	مرکز بیضی
	دو نقطه ثابت فاصله کانونی $FF' = 2c$	F و F'	کانون‌ها
	دو سر قطر بزرگ قطر بزرگ $AA' = 2a$	A و A'	رأس‌های کانونی
	دو سر قطر کوچک قطر کوچک $BB' = 2b$	B و B'	رأس‌های غیرکانونی

ردپای کتاب (بررسی تمرین ۴ صفحه ۵۷ کتاب درسی)

در بیضی زیر AA' و BB' دو قطر بیضی هستند، خط d در نقطه B بر بیضی مماس است پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، اگر $\angle BCF = \alpha$ باشد، می‌توان نشان داد:



$$\frac{AD}{AF} = \frac{1}{e}$$

اثبات: دو مثلث OBF و BFC متشابه‌اند، بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{a}{BC} = \frac{c}{a} = \frac{b}{CF} \Rightarrow BC = \frac{a^2}{c}$$

با توجه به این که $AD = OD - OA$ و همچنین $AF = OA - OF$ است، خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{OD - OA}{OA - OF} = \frac{BC - OA}{OA - OF} = \frac{\frac{a^2}{c} - a}{a - c} = \frac{a^2 - ac}{c(a - c)} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$$

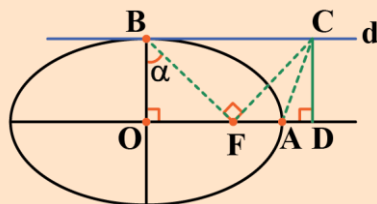
کپسول دوبینگ | (نتایج تمرین مهم کتاب درسی از بیضی)

یک نتیجه جالب و مهم از رابطه فوق رابطه خروج از مرکز و زاویه α است؛ اگر به مثلث OBF نگاه کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin \alpha = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = e \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{a} = e$$

نسبت مساحت دو مثلث ACD و ACF نیز برابر با نسبت قاعده‌های دو مثلث است، بنابراین:

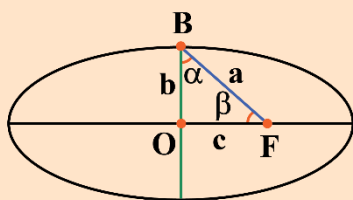


$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{AD}{AF} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{e}$$

کپسول دوبینگ | (مثلث مهم در بیضی)

همیشه یادتان باشد که همه چیز بیضی در مثلث OBF است! به عنوان مثال از این مثلث، خروج از مرکز را هم می‌شود به دست آورد. برای

این‌که به $\frac{c}{a}$ برسیم:

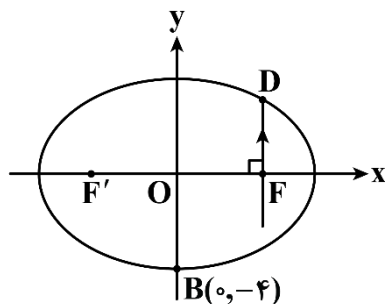


$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a}$$



۲۴- شکل مقابل یک آینه بیضوی را نشان می‌دهد که خروج از مرکز آینه $\frac{5}{6}$ و نقطه F یک کانون بیضی و نقطه B(0, -4) نزدیک‌ترین نقطه سطح آینه به مرکز آینه است، اگر یک شعاع نورانی مطابق شکل بر بدنه آینه بتابد، معادله شعاع بازتابش کدام است؟



$$15x - 8y = 24 \quad (1)$$

$$15y - 8x = 24 \quad (2)$$

$$15x + 8y = 24 \quad (3)$$

$$15y + 8x = 24 \quad (4)$$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان‌بر) - هندسه ۳ صفحه ۴۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر یک شعاع نورانی از یک کانون بیضی بر آن بتابد، شعاع بازتابش از کانون دیگر بیضی می‌گذرد، بنابراین باید خط گذرا از نقطه D و نقطه F' (کانون دیگر بیضی) را بنویسیم:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \\ B(0, -4) \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = \sqrt{a^2 - c^2} \xrightarrow{c=5/6a} 4 = \sqrt{a^2 - (25/36)a^2} \Rightarrow 4 = \sqrt{11/36a^2}$$

$$\Rightarrow \circ / \wedge a = 4 \Rightarrow a = 4 \times \frac{1}{\wedge} \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow c = \circ / 6 \times 5 = 3$$

بنابراین $F(3,0)$ و $F'(-3,0)$ می‌باشد، از طرفی طول وترى که در **کانون بیضی** بر **محور کانونی عمود** می‌شود $\frac{2b^2}{a}$ است،

$$DF = \frac{b^2}{a} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} \Rightarrow D(3, \frac{16}{5})$$

بنابراین:

$$m_{DF'} = \frac{\frac{16}{5} - \circ}{3 - (-3)} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

حال باید خط گذرا از $D(3, \frac{16}{5})$ و $F'(-3,0)$ را بنویسیم:

$$DF': y - \circ = \frac{8}{15}(x + 3)$$

$$\Rightarrow 15y = 8x + 24 \Rightarrow 15y - 8x = 24$$

کپسول دوپینگ | (خروج از مرکز بیضی)

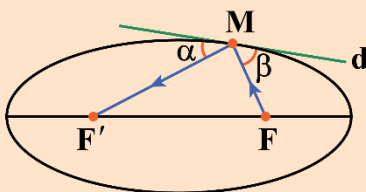
در هر بیضی $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند. این عدد **میزان کشیدگی** بیضی را نشان می‌دهد. چون $c < a$ است، همواره $0 < e < 1$ است. هر چه قدر e به **صفر نزدیک‌تر** شود، بیضی **چاق‌تر** شده و به **دایره شبیه‌تر** می‌شود. اگر $e = 0$ شود، بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

هر چه قدر e به **یک نزدیک‌تر** شود، بیضی **لاغرتر** شده و به **پاره‌خط شبیه‌تر** می‌شود. یعنی اگر $e = 1$ شود، بیضی تبدیل به پاره‌خط می‌شود.

$$\text{خروج از مرکز را از رابطه } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ نیز می‌توان به دست آورد.}$$

کپسول دوپینگ | (بازتابندگی بیضی/آینه بیضی)

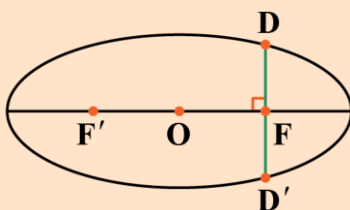
اگر بدنه داخلی بیضی آینه‌ای باشد و یک شعاع نورانی از **یک کانون بیضی بگذرد** و بر بدنه داخلی بیضی بتابد، شعاع بازتابش از **کانون دیگر بیضی می‌گذرد**.



با توجه به شکل **زاویه بین پرتو تابش و بازتابش** با خطی که در نقطه M بر بیضی مماس می‌شود، برابر است. $\alpha = \beta$

کپسول دوپینگ | (طول وتر کانونی بیضی)

طول وترى از بیضی که عمود بر قطر کانونی و گذرا از کانون بیضی رسم می‌شود، برابر است با:



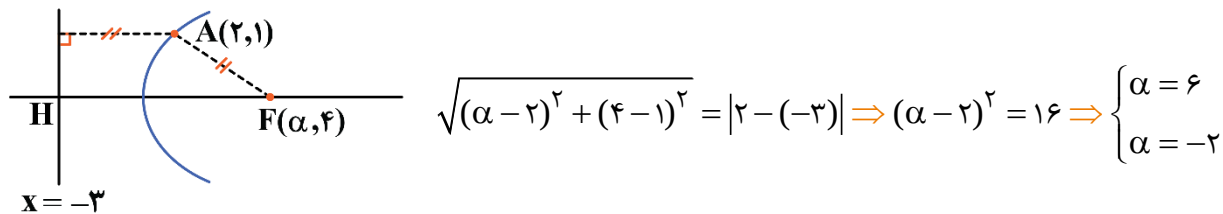
$$DD' = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow DF = \frac{b^2}{a}$$

۲۵- در یک سهمی، خط $x = -3$ خط هادی سهمی و کانون آن روی خط $y = 4$ قرار دارد. اگر این سهمی از نقطه $A(2, 1)$ عبور کند و کانون سهمی در ربع اول دستگاه مختصات واقع باشد، فاصله کانون تا خط هادی سهمی کدام است؟
 ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۵۲ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم هر نقطه روی سهمی از خط هادی و کانون به یک فاصله است، بنابراین کانون را به صورت $F(\alpha, 4)$ روی خط $y = 4$ فرض می کنیم:

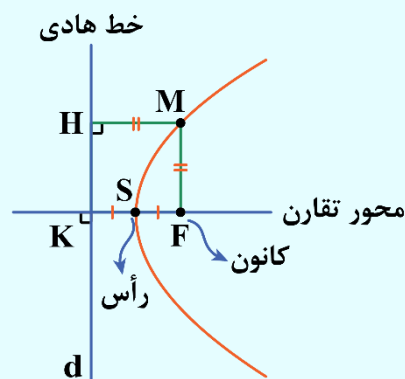


از طرفی می دانیم که کانون سهمی در ربع اول دستگاه مختصات قرار دارد بنابراین $\alpha > 0$ بوده و $\alpha = 6$ قابل قبول است. بنابراین $F(6, 4)$ بوده و فاصله آن تا خط هادی برابر است با:

$$FH = |6 - (-3)| = 9$$



سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از خط ثابت d (خط هادی) و نقطه ثابت F (کانون) که روی خط d قرار ندارد، به یک فاصله باشند. به طور مثال چون M نقطه ای روی سهمی است، $MH = MF$ می باشد. به خطی که از کانون بر خط هادی عمود می شود، محور تقارن سهمی و به نقطه برخورد محور تقارن با سهمی، رأس سهمی (S) می گوئیم. چون S نیز روی سهمی قرار دارد، $SK = SF$ است. دقت کنید که کانون (F) سهمی درون دهانه سهمی، رأس (S) روی سهمی و خط هادی (d) پشت سهمی قرار دارد و S وسط کانون و خط هادی قرار دارد.



فاصله رأس سهمی تا کانون را فاصله کانونی می نامیم و آن را با a نمایش می دهیم. پارامتر سهمی علاوه بر اندازه، یک علامت نیز دارد که نشان می دهد دهانه سهمی به کدام طرف باز می شود. اگر علامت a ، $(+)$ باشد، دهانه سهمی رو به سمت مثبت محورهای مختصات باز می شود (راست یا بالا). اگر علامت a ، $(-)$ باشد، دهانه سهمی رو به سمت منفی محورهای مختصات باز می شود (چپ یا پایین).

معادله استاندارد سهمی

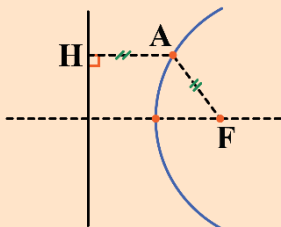
سهمی افقی		سهمی قائم	
رو به چپ ($a < 0$)	رو به راست ($a > 0$)	رو به پایین ($a < 0$)	رو به بالا ($a > 0$)
$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$	$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$	$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$	$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$
خط هادی $x = \alpha + a$	خط هادی $x = \alpha - a$	خط هادی $y = \beta + a$	خط هادی $y = \beta - a$
کانون و رأس هم‌عرض هستند. (در مختصات آن‌ها y برابر است.)		کانون و رأس هم‌طول هستند. (در مختصات آن‌ها x برابر است.)	

کپسول دوبینگ | (همه چیز درباره سهمی)

خط هادی Δ محور تقارن	کانون	به نقطه ثابت F ، کانون سهمی می‌گوییم.
	رأس	به نقطه S که نقطه تلاقی محور تقارن و سهمی است، رأس سهمی می‌گوییم.
	فاصله کانونی	فاصله رأس از کانون و همین‌طور رأس از خط هادی برابر $ a $ است.
	فاصله کانون از خط هادی	فاصله کانون از خط هادی برابر $ 2a $ است.

کپسول دوبینگ | (قلق حل سوالات سهمی با داشتن معادله خط شامل کانون)

در بعضی از تست‌ها خط هادی سهمی و یک نقطه روی سهمی داده می‌شود و گفته می‌شود کانون روی فلان خط قرار دارد، در این موارد بهتر است کانون را به صورت پارامتری روی خط در نظر بگیریم و فاصله نقطه داده شده را از کانون و خط هادی برابر قرار دهیم (تعریف سهمی) تا مقدار پارامتر معلوم شود. با معلوم شدن مقدار پارامتر، مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی معلوم می‌شود و می‌توان مختصات رأس و پارامتر سهمی یعنی a را به دست آورد و معادله سهمی را نوشت.



$$AH = AF$$

گاهی به جای این‌که به طور مستقیم گفته شود کانون روی فلان خط قرار دارد معادله محور تقارن سهمی داده می‌شود که در این حالت باید کانون را به طور پارامتری روی آن در نظر بگیریم. گاهی حتی به جای محور ممکن است دو نقطه با عرض برابر یا دو نقطه با طول برابر داده شود که در این صورت باز هم کانون روی خط محور تقارن قرار دارد.

۲۶- اگر $S(2, -3)$ رأس سهمی $x^2 + mx + ny + 10 = 0$ باشد، مختصات کانون سهمی کدام است؟

- (۱) $(2, -\frac{5}{2})$ (۲) $(2, -1)$ (۳) $(2, -\frac{7}{2})$ (۴) $(2, -5)$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۵۴ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم $x_s = -\frac{m}{2}$ ، بنابراین:

$$-\frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = -4$$

حال می‌دانیم مختصات رأس سهمی باید در سهمی صدق کند:

$$x^2 - 4x + ny + 10 = 0 \xrightarrow{S(2, -3)} 4 - 4(2) + n(-3) + 10 = 0 \\ \Rightarrow 4 - 8 - 3n + 10 = 0 \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2$$

بنابراین معادله سهمی به صورت زیر است:

$$x^2 - 4x + 2y + 10 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = -2y - 10 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = -2y - 6 \Rightarrow (x - 2)^2 = -2(y + 3)$$

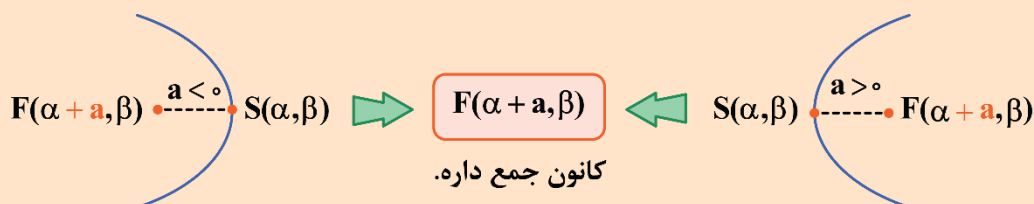
حال می‌توان مختصات رأس و پارامتر سهمی را یافت سپس با توجه به این که سهمی عمودی و دهانه آن رو به پایین است، کانون در پایین رأس قرار دارد و از این جا می‌توان مختصات کانون را به دست آورد:

$$\Rightarrow \begin{cases} S(2, -3) \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow F(2, -3 + (-\frac{1}{2})) = (2, -\frac{7}{2})$$

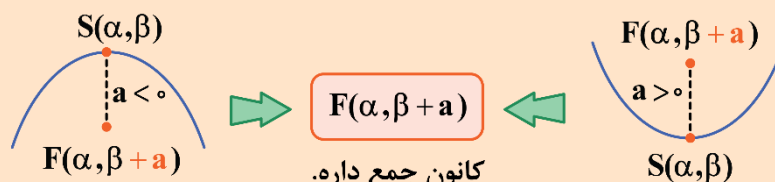
کپسول دوبینگ | (یافتن کانون سهمی)

برای پیدا کردن مختصات کانون یک سهمی، ابتدا باید مختصات رأس سهمی و سپس مقدار a را (با علامت) مشخص کنیم، آن‌گاه:

۱) در سهمی افقی طول رأس سهمی را با a جمع می‌کنیم (چون اگر $a > 0$ ، کانون به اندازه a واحد جلوتر از رأس و اگر $a < 0$ ، کانون به اندازه $|a|$ واحد عقب‌تر از رأس است).



۲) در سهمی قائم عرض رأس سهمی را با a جمع می‌کنیم (چون اگر $a > 0$ ، کانون به اندازه a واحد بالاتر از رأس و اگر $a < 0$ ، کانون به اندازه $|a|$ واحد پایین‌تر از رأس است).



در سهمی قائم مؤلفه y با a جمع شد و در سهمی افقی مؤلفه x . یعنی همیشه مؤلفه‌ای را تغییر می‌دهیم که ضعیف‌تر است (یعنی در معادله سهمی متغیر درجه یک است).

۲۷- معادله دو وجه مقابل یک مکعب مستطیل $P_1: \begin{cases} y=5 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$ و $P_2: \begin{cases} y=1 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$ است، کدام رابطه مربوط به یکی دیگر از

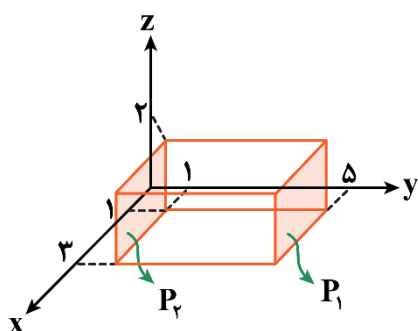
وجه‌های این مکعب مستطیل است؟

$$\begin{cases} z=3 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ 1 \leq y \leq 5 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ 1 \leq z \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} z=2 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

(آسان - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۶۸ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

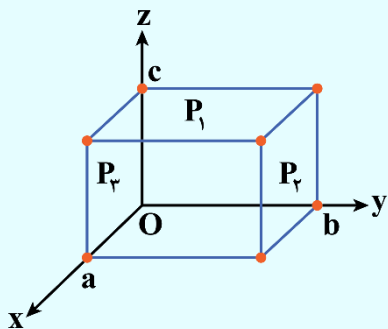
با توجه به شکل معادلات چهار وجه دیگر به صورت زیر است:



$$\begin{cases} x=1 \\ 1 \leq y \leq 5 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ 1 \leq y \leq 5 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} z=2 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

فضای سه بعدی

فرض کنید یک مکعب مستطیلی به شکل زیر داریم در این صورت معادله وجوه P_1, P_2, P_3 به صورت زیر است: (دقت کنید که وجوه مکعب مساحت محدود بین ۴ پاره صفحه هستند نه تمام صفحه)



وجه جلویی	وجه سمت راست	وجه بالایی
$P_3: \begin{cases} x=a \\ 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c \end{cases}$	$P_2: \begin{cases} y=b \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq z \leq c \end{cases}$	$P_1: \begin{cases} z=c \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$

بدیهی است که معادله سه وجه دیگر که بر صفحات مختصات منطبق است به صورت زیر است:

وجه پشت	وجه سمت چپ	وجه پایین
$P_6: \begin{cases} x=0 \\ 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c \end{cases}$	$P_5: \begin{cases} y=0 \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq z \leq c \end{cases}$	$P_4: \begin{cases} z=0 \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$

حجم این مکعب مستطیل با توجه به شکل آن و همچنین معادله وجوه آن برابر است با:

$$V = abc$$

سطح کل این مکعب مستطیل با توجه به شکل آن و همچنین معادله وجوه آن برابر است با:

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

۲۸- اگر $|\vec{a}|=3$ ، $|\vec{b}|=2$ ، $|\vec{c}|=1$ باشد و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ ، آن‌گاه $\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$ کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۳ صفحه ۷۹ - ۱۲۰۳

می‌دانیم اگر دو بردار برابر باشند، اندازه آن‌ها نیز برابر است:

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}) = 1+1+16$$

$$\Rightarrow 9+4+1+2x = 18 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

بردارها

بردار به طول واحد در جهت محور xها را با $\vec{i}$ نمایش می‌دهیم و همین‌طور بردارهای به طول واحد در جهت مثبت محور yها و zها را به ترتیب $\vec{j}$ و $\vec{k}$ می‌نامیم و در واقع داریم:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

و به‌طور کلی هر بردار به‌صورت $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع مضاربی از $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ نمایش داد:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

طول بردار

با توجه به فرمول فاصله دو نقطه در $\mathbb{R}^3$ ، طول هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ در $\mathbb{R}^3$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

کپسول دوپینگ | (برایند دو بردار و خواص آن)

حاصل‌جمع دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود که به آن **بردار برایند** نیز می‌گوییم:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

به‌طور کلی اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{0} = (0, 0, 0)$ بردار صفر و r و s دو عدد حقیقی باشند، همواره روابط زیر برقرار است:

جاب‌جایی $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$
شرکت‌پذیری جمع $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	$(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$
عضو قرینه $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	$(rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$
عضو خنثی در عمل جمع $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	$\vec{b} = r\vec{a} \Rightarrow \vec{b} = r \vec{a} $

کپسول دوپینگ | (اتحادها برای بردارها)

تمام اتحادهایی که **دارای توان ۲** هستند برای بردارها با **عمل ضرب داخلی** برقرارند، از جمله این اتحادها، اتحاد مربع سه‌جمله‌ای است:

$$|a+b+c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a.b + a.c + b.c)$$

یه نمونه باحال ببین!

اگر اندازه بردارهای a, b, c برابر ۲ بوده و بردارها دوه‌دو بر هم عمود باشند، اندازه بردار $a - 2b + 3c$ کدام است؟
 $|a - 2b + 3c|^2 = |a|^2 + 4|b|^2 + 9|c|^2 + 6a \cdot c - 4a \cdot b - 12b \cdot c = 4 + 4 \times 4 + 9 \times 4 + 0 + 0 + 0 = 56 \Rightarrow |a - 2b + 3c| = \sqrt{56}$



۲۹- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند، به‌طوری‌که $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 5$ و اندازه تصویر بردار $\vec{b}$ روی بردار $\vec{a}$ برابر ۳ باشد،

مساحت کوچک‌ترین متوازی‌الاضلاع بناشده بر روی دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{17}$ (۲) $8\sqrt{41}$ (۳) $6\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{41}$

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۳ صفحه ۸۱ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۱

$$|b'| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \right| \Rightarrow \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{2} \right| = 3 \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| = 6$$

می‌دانیم اندازه تصویر بردار $\vec{b}$ روی بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$$\Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 6 \Rightarrow 2 \times 5 \times \cos \theta = 6 \Rightarrow |\cos \theta| = 0.6$$

بنابراین $\sin \theta = 0.8$ است و حال مساحت کوچک‌ترین متوازی‌الاضلاع بناشده بر روی دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ برابر است با

حاصل ضرب اندازه دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ چون این دو بردار بر هم عمودند، بنابراین کافی است $|\vec{a} + \vec{b}|$ و $|\vec{a} \times \vec{b}|$ را به‌دست

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 2 \times 5 \times \frac{4}{5} = 8$$

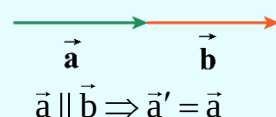
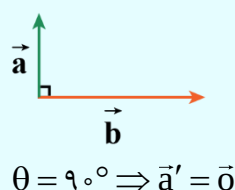
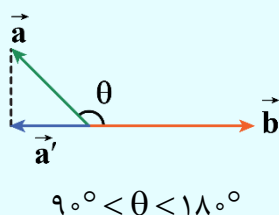
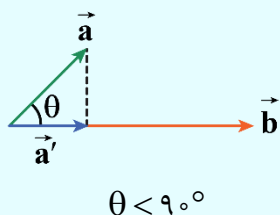
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 2^2 + 5^2 - 2 \times 2 \times 5 \times \frac{3}{5} = 4 + 25 - 12 = 17 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{17}$$

بنابراین مساحت کوچک‌ترین متوازی‌الاضلاع (که با فرض منفی بودن $\cos \theta$ به‌دست آمده) برابر است با:

$$S = |(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})| = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} + \vec{b}| \sin 90^\circ = 8\sqrt{17}$$

تصویر قائم بردار بر بردار دیگر

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ ، برداری در راستای بردار $\vec{b}$ است. در نتیجه ضربی از بردار $\vec{b}$ می‌باشد.



بردار $\vec{a}'$ از رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آید:

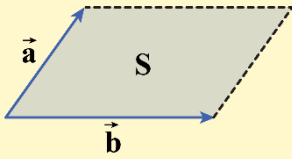
$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

و اندازه بردار $\vec{a}'$ برابر است با:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \text{ یا } |\vec{a}'| = |\vec{a}| |\cos \theta|$$

مساحت متوازی‌الاضلاع

اگر a و b دو بردار باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع می‌شود برابر است با اندازه بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار:



$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

کپسول دوبینگ | (محاسبات ضرب خارجی)

چون $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$ است، بنابراین برای راحت‌تر شدن محاسبه حاصل ضرب خارجی دو بردار بر حسب ترکیب خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌توانیم هر بردار از پیرانتز اول را در بردار غیرهم‌نام خود در پیرانتز دوم ضرب کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

$$(\vec{3a} + \vec{4b}) \times (\vec{2a} + \vec{5b}) = \vec{3a} \times \vec{5b} + \vec{4b} \times \vec{2a} = 15(\vec{a} \times \vec{b}) + 8(\vec{b} \times \vec{a}) = 15(\vec{a} \times \vec{b}) - 8(\vec{a} \times \vec{b}) = 7\vec{a} \times \vec{b}$$

••• ilo •••

۳- اگر تصویر قائم بردار $\vec{a} = (1, \sqrt{2}, -1)$ بر بردار $\vec{b}$ را بردار $\vec{c}$ بنامیم و زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 120° باشد، حجم متوازی‌السطوح بنشده بر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{c}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

$3\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{9}{2}$ (۳)

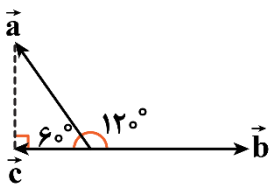
۳ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۸۳ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲ 

مطابق شکل داریم:



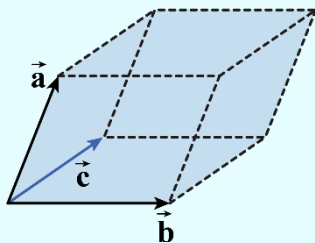
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cos 60^\circ = \sqrt{1+2+1} \times \frac{1}{2} = 1$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح برابر است با:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = |\vec{a} \times \vec{c}|^2 = (|\vec{a}| |\vec{c}| \sin 60^\circ)^2 = (2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3$$

حجم متوازی‌السطوح

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ سه بردار غیرهم‌صفحه در فضا باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ بنا می‌شود برابر است با:



$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

••• ilo •••

۳۱- اگر a عددی فرد باشد و $a + 2^{19} | b$ ، باقی‌مانده عبارت $a^2 + b^2 + 2$ بر عدد ۸ کدام است؟
 ۲ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) صفر

(آسان - مفهومی - سریع) - گسسته صفحه ۱۵ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۲

مجموع هر عدد فرد با هر عدد زوج، عددی فرد است، پس $a + 2^{19}$ فرد است و چون $a + 2^{19} | b$ ، بنابراین b نیز فرد است.

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a + \underbrace{2^{19}}_{\text{زوج}} = 2k' + 1 \Rightarrow b = 2k'' + 1$$

از طرفی می‌دانیم مربع هر عدد فرد به شکل $8q + 1$ است، پس:

$$a^2 + b^2 + 2 = (8q + 1) + (8q' + 1) + 2 = 8(q + q') + 4 \Rightarrow r = 4$$

بخش‌پذیری

می‌گوییم عدد صحیح b بر عدد صحیح a بخش‌پذیر است و یا a عدد b را می‌شمارد (عاد می‌کند) اگر عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد، به طوری که: $b = aq$
 و می‌نویسیم: $a | b$
 پس عبارت‌های زیر معادل‌اند:

a مضرب صحیح b است.	b بر a بخش‌پذیر است.	$a b$	$\exists q \in \mathbb{Z}$ $b = aq$	a, b را عاد می‌کند. a, b را می‌شمارد.	a مقسوم‌علیه b است. a عامل b است. a شمارنده b است.
------------------------	--------------------------	---------	--	--	--

نکته!

۱) تبدیل عاد کردن به تساوی خیلی خیلی مهم است و زیاد استفاده می‌شود:

$$a = bq \Leftrightarrow b | a$$

۲) منظور از عدد در بخش نظریه اعداد، عدد صحیح است، بخش‌پذیری توی عددهای گنگ، کسری و ... تعریف نمی‌شود.

قضیه تقسیم

عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت q و باقی‌مانده r است و داریم:

خارج قسمت مقسوم
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $a = bq + r$, $0 \leq r < b$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 باقی‌مانده مقسوم‌علیه

افراز $\mathbb{Z}$ در تقسیم بر ۲: اگر مقسوم‌علیه $b = 2$ باشد، باقی‌مانده صفر یا ۱ است. پس هر عدد صحیح یکی از حالت‌های $a = 2q$ یا $a = 2q + 1$ را دارد. پس در بین اعداد صحیح، عددهای زوج و فرد **یکی در میان** قرار گرفته‌اند. بنابراین در بین هر دو عدد متوالی یکی زوج و یکی فرد است. پس **ضرب دو عدد صحیح متوالی حتماً زوج است:**

$$\forall n \in \mathbb{Z}; 2 | n(n+1)$$

کپسول دوپینگ | (مربع اعداد زوج و فرد)

الف) اگر عددی زوج باشد، به شکل $a = 2q$ است. مربع این عدد به شکل $a^2 = 4q^2$ است. پس اگر a زوج باشد، a^2 نیز زوج است و a^2 حتماً بر ۴ بخش‌پذیر است.

ب) اگر عددی فرد باشد، به شکل $a = 2q + 1$ است؛ پس داریم:

$$a^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q+1) + 1 = 4(2k) + 1 = 8k + 1$$

ضرب دو عدد متوالی زوج است.

الان ثابت کردیم مربع عدد فرد a به صورت $8q + 1$ است. پس اگر a فرد باشد a^2 به صورت $8q + 1$ است. یعنی باقی‌مانده مربع عدد فرد بر ۴ و ۸، فقط می‌تواند ۱ باشد.

کپسول دوبینگ | (زوج یا فرد بودن مقسوم و مقسوم‌علیه)

$a|b$ ، در این صورت:

$$(3|9, 3|6)$$

$$a = 2n \Rightarrow b = aq = 2nq$$

$$2|6, 3|6$$

۱- اگر a فرد باشد، b می‌تواند فرد یا زوج باشد:

۱- اگر a زوج باشد، b حتماً زوج است:

۱- اگر b فرد باشد، a حتماً فرد است چون اگر a زوج باشد، باید b هم زوج باشد.

۱- اگر b زوج باشد، a می‌تواند فرد یا زوج باشد:

کپسول دوبینگ | (حالات مختلف زوج یا فرد بودن جمع دو عدد)

مجموع دو عدد فرد و دو عدد زوج، عددی زوج است اما مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد عددی فرد است.



۳۲- اگر a عددی اول باشد که اعداد $3n+1$ و $2n^2-n+2$ را عاد کند، آنگاه رقم یکان a^2 کدام است؟
 ۴ (۱) ۳ (۵) ۲ (۶) ۱ (۹)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۱۲ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

باید با استفاده از رابطه‌های عاد کردن داده‌شده و خواص رابطه عاد کردن متغیر n را از بین ببریم. برای آن ابتدا دو رابطه عاد کردن می‌سازیم که ضریب n^2 در این دو قرینه باشد و سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} a|3n+1 \xrightarrow{\times 2n} a|6n^2+2n \\ a|2n^2-n+2 \xrightarrow{\times -3} a|-6n^2+3n-6 \end{array} \right\} \Rightarrow a|5n-6$$

حال دو رابطه عاد کردن می‌سازیم که ضریب n در این دو قرینه باشد و سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} a|3n+1 \xrightarrow{\times 5} a|15n+5 \\ a|5n-6 \xrightarrow{\times -3} a|-15n+18 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} a|13 \xrightarrow{a \text{ عددی اول}} a=13 \text{ یا } a=1 \text{ غ ق ق}$$

$$a^2 = 13 \times 13 \Rightarrow 9 = \text{رقم یکان}$$

$$a^2 = 13^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

و یا:

کپسول دوبینگ | (ویژگی‌های بخش‌پذیری/عاد کردن)

اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آنگاه:

$$1) |a, a|$$

(هر عددی بر ۱ بخش‌پذیر است و صفر بر همه اعداد بخش‌پذیر است)

۲) $a|a, a|-a$

۳) $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$

۴) $a|b, b|c \Rightarrow a|c$

۵) $a|b \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} a|bq$ (اگر a, b را بشمارد، هر مضربی از b را می‌شمارد)

۶) $a|b, a|c \Rightarrow a|mb + nc$ (اگر a, b و c را بشمارد، هر ترکیب خطی از b و c را می‌شمارد)

۷) $a|b \Rightarrow a^n|b^n, a|b^n \quad (n \in \mathbb{N})$



۳۳- اگر باقی‌مانده تقسیم $7^{131} + 131! + A$ بر عدد 43 مساوی 21 باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی A کدام است؟

۲۹ (۴)

۲۷ (۳)

۲۳ (۲)

۲۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۲۱ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

$$7^3 = 343 \equiv 42 \equiv -1 \xrightarrow{\text{توان } 43} 7^{129} \equiv -1 \xrightarrow{\times 7^2} 7^{131} \equiv -49 \equiv -6$$

$$131! = 43k \equiv 0$$

از طرفی:

پس داریم:

$$\Rightarrow 7^{131} + 131! + A \equiv 21 \Rightarrow -6 + A \equiv 21 \xrightarrow{+6} A \equiv 27$$

پس کوچک‌ترین عدد طبیعی A که در همنهشتی آخر صدق می‌کند همان 27 است.

همنهشتی

دو عدد a و b را به پیمانه m ، همنهشت می‌گوییم؛ هرگاه باقی‌مانده آن‌ها در تقسیم به m ، یکسان باشد یا به عبارتی اختلافشان بر m

بخش‌پذیر باشد $(m|b-a)$ و می‌نویسیم: $a \equiv b \pmod{m}$

کلاس همنهشتی

مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m ، برابر r باشد را کلاس یا دسته همنهشتی r به پیمانه m می‌نامیم و آن را به صورت $[r]_m$ نمایش می‌دهیم، پس:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} | x = mk + r\}$$

ویژگی‌های همنهشتی

اگر a, b, c سه عدد صحیح باشند، آن‌گاه:

۱) $a \equiv b \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c$

(به دو طرف یک رابطه همنهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا کم کرد.)

۲) $a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$

(دو طرف یک رابطه همنهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.)

۳) $a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$

(دو طرف یک رابطه همنهشتی را می‌توان به توان عددی طبیعی رساند.)

۴) $a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d$

(دو رابطه همنهشتی با پیمانه m را می‌توان با هم جمع یا تفریق یا ضرب کرد.)

$$۵) a = mq + r \Rightarrow a \equiv r \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{cases} \xRightarrow{m} a \equiv b$$

یعنی اگر a و b در تقسیم بر m هم‌باقی‌مانده باشند، آن‌گاه در پیمانه m با هم هم‌نهشت‌اند.

$$۶) a \equiv b \Rightarrow a \pm qm \equiv b \pm km \quad (\text{می‌توان ضرایب متفاوت } m \text{ را به هر یک از طرفین رابطه هم‌نهشتی اضافه یا کم کرد.})$$

$$۷) ac \equiv bc \xrightarrow{\div c} a \equiv b$$

$$۸) ac \equiv bc \xrightarrow{(m,c)=d} a \equiv \frac{m}{d} b$$

$$\text{نتیجه: } ac \equiv bc \xrightarrow{(m,c)=1} a \equiv b$$

$$۹) a \equiv b, a \equiv b \Rightarrow a \equiv b \quad [m,n]$$

نکته طلایی!

عدد $n!$ بر همه اعداد کوچک‌تر یا مساوی n بخش‌پذیر است.

کپسول دوبینگ | (کاربردی‌ترین ویژگی‌های هم‌نهشتی)

$$۱) a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a \pm c \equiv b \pm c \quad (\text{دو طرف رو می‌شه با عدد ثابت } c \text{ جمع (تفریق) کرد.}) \\ ac \equiv bc \quad (\text{دو طرف رو می‌شه در عدد ثابت } c \text{ ضرب کرد.}) \\ a^n \equiv b^n \quad (\text{دو طرف رو می‌شه به توان عدد طبیعی } n \text{ رساند.}) \\ \text{هر یک از مقسوم‌علیه‌های } m \\ \uparrow \\ a \equiv b \quad (\text{به جای پیمانه، می‌شه هر کدوم از مقسوم‌علیه‌های مثبت اون رو قرار داد.}) \end{cases}$$

$$۲) a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd \\ a \pm c \equiv b \pm d \end{cases}$$

تقسیم طرفین هم‌نهشتی بر یک عدد:

اگر پیمانه و عددی که قرار است طرفین بر آن تقسیم شوند، عامل مشترک بزرگ‌تر از یک داشته باشند، پیمانه عوض می‌شود.

$$۳) ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv \frac{m}{(m,c)} b$$



۳۴- اگر عدد ۵ رقمی به شکل $\overline{2bb3a}$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد، باقی مانده آن بر ۴ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

(آسان - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۲۳ - ۱۲۰۱

$$\begin{aligned} \overline{2bb3a} &\equiv 0 \Rightarrow a - 3 + b - b + 2 \equiv 0 \Rightarrow a - 1 \equiv 0 \\ \Rightarrow a &\equiv 1 \Rightarrow a = 11k + 1 \xrightarrow{0 \leq a \leq 9} k = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \Rightarrow \overline{2bb31} &\equiv 31 \equiv 3 \end{aligned}$$

کپسول دوبینگ | (همنهشتی اعداد در برخی از پیمانه‌های خاص)

اگر $x = a_1a_2...a_n$ عددی n رقمی باشد، آن‌گاه:

$$1) \quad x \equiv a_n, \quad x \equiv \underbrace{a_{n-1}a_n}_{\text{دو رقم سمت راست}}, \quad x \equiv \underbrace{a_{n-2}a_{n-1}a_n}_{\text{سه رقم سمت راست}}$$

$$2) \quad x \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad x \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$3) \quad x \equiv a_n, \quad x \equiv a_n$$

$$4) \quad x \equiv 3((a_1a_2...a_{n-1}) - 2a_n) \quad (\text{دو برابر یکان را از بقیه ارقام کم می‌کنیم و حاصل را در ۳ ضرب می‌کنیم})$$

$$5) \quad x \equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + (-1)^n a_2 + (-1)^{n+1} a_1$$

یه نمونه باحال ببین!

$$\overline{abc} \equiv c - b + a, \quad \overline{abcd} \equiv d - c + b - a$$

••• ماز •••

۳۵- اگر ۱۰ آبان در سالی روز شنبه باشد، دومین سه‌شنبه اسفندماه، چندم اسفند خواهد شد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۲۴ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا شنبه را مبدأ می‌گیریم تمام روزهای هفته را از ۰ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم:

شنبه، ۱شنبه، ۲شنبه، ۳شنبه، ۴شنبه، ۵شنبه، ۶جمعه

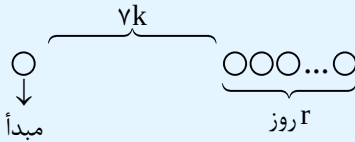
ابتدا محاسبه می‌کنیم اول اسفند ماه کدام روز هفته است.

$$\begin{aligned} &\overline{10 \text{ آبان}} - \overline{11 \text{ آبان}} = 30 - 11 = 19 \\ &19 \div 7 = 2 \text{ باقیمانده } 5 \end{aligned}$$

پس انگار از شنبه ۶ روز سپری شده است و به جمعه می‌رسیم. پس یکم اسفند جمعه است پس اولین سه‌شنبه، پنجم اسفند است و از آنجا دومین سه‌شنبه اسفندماه ۱۲م اسفند می‌شود.

استراتژی

برای حل مسائل مربوط به تاریخ و روزهای هفته باید همنهشتی تعداد روزها را بر ۷ محاسبه کنیم. زیرا اگر امروز دوشنبه باشد، ۷ روز قبل هم دوشنبه بود، ۷ روز بعد، ۱۴ روز بعد و کلاً ۷۹ روز بعد نیز دوشنبه است؛ پس اضافه یا کم کردن روزها اگر تعدادشان **مضرب ۷** باشد **مهم نیست** و فقط **باقی‌ماندهٔ تعداد روزهای سپری‌شده بر ۷ مهم است**. یعنی اگر روز مبدأ را صفر در نظر بگیریم، باقی‌ماندهٔ تعداد روزهای سپری‌شده را بر ۷ به‌دست می‌آوریم. در این صورت فقط روزهای باقی‌مانده را در نظر می‌گیریم.



انگار که فقط ۷ روز سپری شده است.

کپسول دوپینگ | (کاربرد همنهشتی در مسائل تقویم و روزهای هفته)

اگر یک روز از هفته را در مبدأ زمان بدانیم و بخواهیم بفهمیم n روز بعد (یا قبل) چند شنبه است، کافی است n روز بعد (یا قبل) را بررسی کنیم. n **باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۷** است.



۳۶- رقم دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی a که به‌ازای آن معادلهٔ همنهشتی $5a + 1 \equiv 91x \pmod{7}$ ، در مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ جواب داشته باشد، کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۷ (۴) ۹

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - گسسته صفحه ۲۵ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شرط وجود جواب معادلهٔ همنهشتی داریم:

$$\begin{aligned} (91, 169) | 5a + 1 &\Rightarrow 13 | 5a + 1 \Rightarrow 5a + 1 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 5a \equiv -1 \pmod{13} \\ \Rightarrow 5a &\equiv -1 + 13 + 13 \xrightarrow[\div 5]{(5, 13)=1} a \equiv 5 \pmod{13} \Rightarrow a = 13k + 5 \xrightarrow{k=8} \\ a &= 104 + 5 = 109 \Rightarrow \text{صفر} = \text{رقم دهگان} \end{aligned}$$

معادلهٔ همنهشتی

رابطهٔ همنهشتی شامل مجهول x به‌صورت $ax \equiv b \pmod{m}$ را یک معادلهٔ همنهشتی می‌گویند. منظور از حل معادلهٔ همنهشتی یافتن x هایی است که $x \in \mathbb{Z}$ و رابطهٔ همنهشتی به‌ازای آن‌ها برقرار باشد. برای حل معادلهٔ همنهشتی باید به کمک ویژگی‌های همنهشتی x را تنها کنیم، سپس با کمک تعریف همنهشتی x را به‌صورت یک مجموعه جواب بنویسیم. به‌طور مثال:

$$3x \equiv 1 \xrightarrow{+14} 3x \equiv 15 \xrightarrow[\div 3]{(3, 7)=1} x \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 5 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

کپسول دوپینگ | (شرط وجود جواب معادله همنهشتی)

شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ همنهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ جواب داشته باشد آن است که: $(a, m) | b$



۳۷- در تقسیم عدد ۲۳۱ بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت، دو برابر مربع باقی‌مانده است، چند مقدار برای b می‌توان یافت؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - گسسته صفحه ۱۴ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۲

بنا بر قضیه تقسیم داریم:

$$231 = bq + r \xrightarrow{q=2r^2} 231 = b \times (2r^2) + r$$

$$\Rightarrow 231 = r(2br + 1) \Rightarrow 7 \times 11 \times 3 \times 1 = r(2br + 1)$$

با تجزیه ۲۳۱ دیدیم که در سمت راست تساوی نیز r بالاخره یکی از عوامل موجود است. بدیهی است مقدار پرانتز از r بیشتر است، پس:

$$r < 2br + 1 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \Rightarrow 2br + 1 = 231 \Rightarrow 2b = 230 \Rightarrow b = 115 \checkmark \\ r = 3 \Rightarrow 2br + 1 = 77 \Rightarrow 6b = 76 \Rightarrow b = \frac{76}{6} \notin \mathbb{N} \\ r = 7 \Rightarrow 2br + 1 = 33 \Rightarrow 14b = 32 \Rightarrow b = \frac{16}{7} \notin \mathbb{N} \\ r = 11 \Rightarrow 2br + 1 = 21 \Rightarrow 22b = 20 \Rightarrow b = \frac{10}{11} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

پس فقط به‌ازای یک مقدار b شرایط خواسته‌شده مسئله برقرار است.

۳۸- به‌ازای چند عدد طبیعی a که کمتر از ۱۰۱ هستند، تساوی مقابل برقرار است؟
 $[a+11, 7] = |7a+77|$
 (۱) ۹۲ (۲) ۹۰ (۳) ۸۷ (۴) ۸۶

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - گسسته صفحه ۱۷ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که وقتی k م.م. دو عدد برابر حاصل ضرب آن‌ها شده یعنی فاقد عوامل مشترک بوده‌اند. پس ب.م.م آن‌ها ۱ است.

$$\Rightarrow [a+11, 7] = |7(a+11)| \Rightarrow (a+11, 7) = 1$$

$$\Rightarrow a+11 \neq 7k \Rightarrow a \neq 7k-11$$

$$\xrightarrow{1 \leq a \leq 100} 1 \leq 7k-11 \leq 100 \Rightarrow 2 \leq k \leq 15$$

پس به‌ازای ۸۶ مقدار a تساوی برقرار است.

کپسول دوپینگ | (ب.م.م و ک.م.م در حالت خاص)

اگر $[a, b]$ ک.م.م و (a, b) ب.م.م دو عدد صحیح a و b باشد، آنگاه:

$$[a, b](a, b) = |ab|$$

در نتیجه:

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow [a, b] = |ab|$$

۳۹- به ازای چند عدد دو رقمی n ، دو عدد طبیعی $5n+4$ و $11n+3$ ، نسبت به هم اول اند؟

۸۷ (۴)

۸۸ (۳)

۸۹ (۲)

۹۰ (۱)

(سخت - ترکیبی - زمان بر) - گسسته صفحه ۲۵ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

$$(5n+4, 11n+3) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 5n+4 \xrightarrow{\times 11} d | 55n+44 \\ d | 11n+3 \xrightarrow{\times 5} d | 55n+15 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} d | 29 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 29$$

از روش متمم استفاده می‌کنیم:

$$29 | 5n+4 \Rightarrow 5n+4 \equiv 0 \Rightarrow 5n \equiv -4$$

$$\Rightarrow 5n \equiv -4+29 \xrightarrow{\div 5} n \equiv 5 \Rightarrow n = 29q+5$$

۳ مقدار n دو رقمی داریم که باعث می‌شود دو عبارت نسبت به هم اول نباشند. $q = 1, 2, 3 \Rightarrow$ مقدار n دو رقمی است

پس $90-3=87$ مقدار دو رقمی داریم که باعث می‌شود دو عبارت نسبت به هم اول باشند.

ب.م.م و ک.م.م

۱) $(a, b) = d$ را بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b می‌نامیم، اگر:

- ۱) $d | a, d | b \Rightarrow$ d مقسوم علیه هر دو عدد a و b باشد.
- ۲) $m | a, m | b \Rightarrow m | d \Rightarrow$ d بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک باشد.

یه نمونه باحال ببین!

۱۲ مقسوم علیه‌های ۱۲: ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲

۱۸ مقسوم علیه‌های ۱۸: ۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸

(بقیه مقسوم علیه‌های مشترک ۶ را می‌شمارند: $6 | 6, 6 | 12, 6 | 18 \Rightarrow (12, 18) = 6$)

محاسبه ب.م.م

برای محاسبه ب.م.م دو عدد a و b ، پس از تجزیه a و b به عوامل اول، کافی است **عوامل مشترک را با کمترین توان** در هم ضرب کنید:

$$\begin{cases} 12 = 2^2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3^2 \end{cases} \Rightarrow (12, 18) = 2^1 \times 3^1 = 6$$

۲) $[a, b] = c$ را کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b می‌نامیم، اگر:

- ۱) $a | c, b | c \Rightarrow$ c مضرب هر دو عدد a و b باشد.
- ۲) $a | m, b | m \Rightarrow c | m$ کوچک‌ترین مضرب مشترک باشد.

یه نمونه باحال ببین!

۶ مضارب ۶: ۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۰, ۳۶, ۴۲, ۴۸, ...

۴ مضارب ۴: ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, ۲۴, ۲۸, ۳۲, ۳۶, ...

(بقیه مضارب مشترک بر ۱۲ بخش پذیر هستند.) $[4, 6] = 12 \Rightarrow 12, 24, 36, \dots$ مضارب مشترک

برای محاسبه ک.م.م دو عدد a و b ، پس از تجزیه a و b به عوامل اول، کافی است عوامل مشترک را با بیشترین توان در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم.

$$\begin{cases} 6 = 2 \times 3 \\ 4 = 2^2 \end{cases} \Rightarrow [6, 4] = 2^2 \times 3 = 12$$

کپسول دوپینگ | (کاربرد همنهشتی در ب.م.م)

اگر در سؤالی از ما بپرسند ب.م.م دو عدد که با پارامتر مشخص شده‌اند، به‌ازای چه مقادیری از پارامتر مجهول ویژگی خاصی دارد، ب.م.م را d می‌گیریم و دو تا رابطه عاد کردن با تعریف ب.م.م می‌نویسیم. سپس d را جای‌گذاری می‌کنیم و عاد کردن را به‌صورت همنهشتی درمی‌آوریم.

یه نمونه باحال بین!

ب.م.م دو عدد $3n + 1$ و $5n - 2$ با استفاده از روش ترکیب خطی برابر است با:

$$\begin{cases} d | 3n + 1 \\ d | 5n - 2 \end{cases} \Rightarrow d | 5(3n + 1) - 3(5n - 2) \Rightarrow d | 11 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 11$$

حالا سؤال می‌پرسد به‌ازای کدام مقادیر n ، ب.م.م 11 است. می‌نویسیم:

$$11 | 3n + 1$$

$$11 | 5n - 2$$

و یک رابطه را به‌صورت همنهشتی درمی‌آوریم:

$$11 | 3n + 1 \xrightarrow{\text{تعریف همنهشتی}} 3n \equiv -1 \xrightarrow[\text{اضافه کنیم}]{\text{مضرب مناسب 1 را به 1- اضافه}} 3n \equiv -1 \equiv 10 \xrightarrow[\text{3, 11)=1}]{\div 3} n \equiv 7$$

پس باید $n = 11q + 7$ باشد مثلاً $n = 7, 18, \dots$ مناسب است تا ب.م.م بشود 11.



۴۰- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی که مضرب ۱۳ بوده و باقی‌مانده آن بر اعداد ۳ و ۷ مساوی ۲ باشد، کدام است؟
 ۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - گسسته صفحه ۲۲ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

اگر a عدد سه رقمی موردنظر باشد، داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{3} \\ a \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} \xrightarrow{[3, 7]=21} a \equiv 2 \pmod{21} \Rightarrow a = 21k + 2$$

$$13 | a \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{13}$$

$$21k + 2 \equiv 0 \pmod{13} \xrightarrow{21 \equiv 8} 8k \equiv -2 \pmod{13} \Rightarrow 8k \equiv 11 \pmod{13} \xrightarrow[\text{8, 13)=1}]{\div 8} k \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow k = 13k' + 3$$

$$\Rightarrow a = 21(13k' + 3) + 2 = 273k' + 65 \xrightarrow{k'=1} a = 273 + 65 = 338$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 3 + 3 + 8 = 14$$

